Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 2

Auf dem gesamten Blatt ist R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass ein Funktor $F\colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$ genau dann linksexakt ist, wenn er direkte Summen und Kerne erhält. Dual dazu gilt dann auch, dass ein F genau dann rechtsexakt ist, wenn F direkte Summen und Kokerne erhält. Folgern Sie daraus, dass Linkadjungierte Funktoren rechtsexakt sind und Rechtsadjungierte Funktoren linksexakt sind.

Aufgabe 2:
Sei S ein weiterer Ring. Weisen Sie nach, dass die Kategorie der R-S-Bimoduln äquivalent zu der Kategorie der $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}$-Linksmoduln ist. Hierbei ist S^{op} der Ring, welcher aus S entsteht, indem man die Reihenfolge bei der Multiplikation vertauscht.

Aufgabe 3:
Sei m eine ganze Zahl mit $m \geq 2$. Überprüfen Sie folgende Endofunktoren der Kategorie $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ auf ihre Rechts- und Linksexaktheit:

(i) $A \mapsto \mathrm{Div}_m(A) = \{a \in A \mid \text{ es existiert } b \in A \text{ mit } mb = a\}$

(ii) $A \mapsto A_{\mathrm{tf}} = A/A_{\mathrm{tors}}$, wobei $A_{\mathrm{tors}} = \{a \in A \mid \mathrm{ord}(a) < \infty\}$ die Torsionsuntergruppe ist

(iii) $A \mapsto A[m] = \{a \in A \mid ma = 0\}$

Aufgabe 4:
In dieser Aufgabe betrachten wir $\mathbb{Z}$ als trivialen $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$-Modul. Finden Sie eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$.
Bemerkung: Hierbei beudetet "triviale Wirkung", dass die Wirkung von $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{Z} \times x\mathbb{Z}$ (mit der Multiplikation von oben) auf 1 und x durch die Multiplikation mit 1 gegeben ist und man dann $\mathbb{Z}$-linear fortsetzt.