Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 11

Aufgabe 1:
Beweisen Sie Prop. III.1.5, d.h. zeigen Sie, dass

$$\langle \alpha \smile \beta, x \rangle = \langle \alpha, x \frown \beta \rangle$$

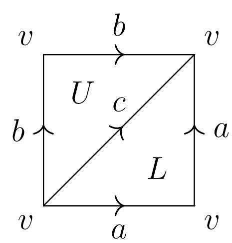
für alle Raumpaare (X, A) und alle $\alpha \in H^k(X, A)$, $\beta \in H^l(X, A)$ und $x \in H_{k+l}(X, A)$ ist.

Aufgabe 2:
Seien A und B Unterräume eines topologischens Raumes X und wir setzen $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Angenommen, die Inklusion der $\mathcal{U}$-kleinen Ketten $C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B) \hookrightarrow C_*(A \cup B)$ induziert Isomorphismen auf der Ebene der Homologie. Zeigen Sie, dass es dann ein relatives Cap-Produkt

$$\frown\colon H_{k+l}(X, A \cup B; R) \otimes H^l(X, A; R) \to H_k(X, B; R)$$

gibt.

Aufgabe 3:
Wir betrachten den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ und die singuläre 2-Kette $[T^2] = -U + L$, welche man folgendem Bild entnehmen kann:



Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass

$$[T^2] \frown -\colon H^1(T^2) \to H_1(T^2)$$

ein Isomorphismus ist. Dabei wollen wir wie folgt vorgehen:

(i) Ist $\sigma\colon \Delta^1 \to S^1$ ein 1-Simplex, so wählen wir einen Lift $\tilde{\sigma}\colon \Delta^1 \to \mathbb{R}$ entlang der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$. Dies liefert uns einen 1-Kozykel $\theta \in C^1(S^1)$ mit

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} \#\{n \in \mathbb{Z} \mid \tilde{\sigma}(1,0) < n \leq \tilde{\sigma}(0,1)\} & \text{falls } \tilde{\sigma}(1,0) \leq \tilde{\sigma}(0,1) \\ -\#\{n \in \mathbb{Z} \mid \tilde{\sigma}(0,1) < n \leq \tilde{\sigma}(1,0)\} & \text{falls } \tilde{\sigma}(0,1) \leq \tilde{\sigma}(1,0). \end{cases}$$

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 11

Rechnen Sie nach, dass $U \frown \mathrm{pr}_1^*(\theta) = 0$ und $L \frown \mathrm{pr}_1^*(\theta) = \{1\} \times \mu$ ist, wobei der 1-Simplex $\mu \in C_1(S^1)$ durch $(t-1, t) \mapsto \exp(2\pi i t)$ gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie $U \frown \mathrm{pr}_2^*(\theta)$ und $L \frown \mathrm{pr}_2^*(\theta)$.

(iii) Folgern Sie nun, dass $[T^2] \frown -\colon H^1(T^2) \to H_1(T^2)$ ein Isomorphismus ist.