Lösung zu Zusatzaufgabe 8b der Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen im WS2015/16

Der Ansatz $u(t,x) = v(t,|x|)$, wobei

$$v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (t,r) \mapsto v(t,r),$$

führt zur Differentialgleichung

$$v_{tt} - c^2 v_{rr} - \frac{2c^2}{r} v_r = 0. \tag{1}$$

Mit der Produktregel lässt sich nachprüfen, dass (1) äquivalent zur Differentialgleichung

$$(rv)_{tt} - c^2 (rv)_{rr} = 0 \tag{2}$$

ist. Gleichung (2) ist eine Wellengleichung für rv, weshalb die d'Alambertsche Formel (6-2) zu ihrer Lösung verwendet werden kann. Sie liefert

$$rv(t,r) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s^3 ds = r^3 t + rc^2 t^3,$$

d. h.

$$v(t,r) = r^2 t + c^2 t^3.$$

Für u folgt

$$u(t,x) = |x|^2 t + c^2 t^3,$$

dieselbe Lösung wie in (a).