Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 9

Abgabe bis zum 16.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):

Sei $f\colon X \to Y$ definierbar.

(a) Zeigen Sie, dass Stetigkeit entlang von Kurven geprüft werden kann, d. h. f ist stetig an einem Punkt $\underline{a} \in X$ genau dann, wenn für alle stetigen definierbaren Funktionen $\gamma\colon (0, \epsilon) \to X$ mit $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \underline{a}$ gilt: $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = f(\underline{a})$.
Hinweis: Wenn f nicht stetig ist, findet man ein Gegenbeispiel-γ ähnlich wie im Beweis von Kurvenauswahl.

(b) Wir nehmen nun an, dass X beschränkt und abgeschlossen ist und f stetig. Zeigen Sie, dass f dann bereits uniform stetig ist.
Hinweis: Wenn nicht, kann man ein $\gamma\colon (0, \epsilon) \to X$ konstruieren, das der Stetigkeit von f (mit Teil (a)) widerspricht. (Wieso ist $\lim_{t\to 0} \gamma(t)$ automatisch in X?)

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Sei $X \subseteq M^n$ definierbar, beschränkt und abgeschlossen, sei $f\colon X \to M^m$ definierbar und stetig, und sei $Y := f(X)$.

(a) Eine definierbare Teilmenge $Z \subseteq Y$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Urbild $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen ist.

(b) Ist f injektiv, so ist f bereits ein Homöomorphismus von X nach Y.

(c) Eine definierbare Abbildung $g\colon Y \to M^k$ ist stetig genau dann, wenn die Verknüpfung $g \circ f$ stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.5.5. (Erinnern Sie sich auch daran: Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.)

Auf 1. Suppose f is not continuous at $\underline{a}$, then there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$A = \{ \|x - \underline{a}\| \mid x \in X, \ |f(x) - f(\underline{a})| \geq \varepsilon \}$$

contains arbitrary small element.

$\Rightarrow$ there is $(0, \delta) \subseteq A$
by o-minimality

$\Rightarrow$ there is $\gamma : (0, \delta) \longrightarrow X$ such that for all $t \in (0, \delta)$ $\|\gamma(t) - \underline{a}\| = t$
and
$|f(\gamma(t)) - f(\underline{a})| \geq \varepsilon$
(*)

$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = \underline{a}$

(limit of γ exists, since by monotonocity all component of γ is eventually monoton and X is bounded and also X is closed., $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = \underline{a}$)

(*) is in contradiction with $\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = f(\underline{a})$.

b) Suppose, not true for some $\varepsilon > 0$, then for each $t > 0$, there exist x such that
$\exists y \ (|x - y| < t \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon)$
with same argument as (a), we can choose $\gamma : (0, \delta) \longrightarrow X$
which pick out such a x for each $t \in (0, \delta)$
$\lim_{t \to 0} \gamma(t) \in X$ (as explained above).

then at $x = \lim_{t \to 0} \gamma(t)$, f will not be continuous.

which is contradiction. ∎

Auf 2. a) $f: X \longrightarrow Y \subseteq M^n$ by 2.5.5 Y is closed.

closed, bounded

$Z \subseteq Y$ closed $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(Z)$ is closed.

$X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$ $\Leftarrow$ It's always true.

If Z is closed $\Leftrightarrow$ $Y \setminus Z$ is open $\Leftrightarrow$ $X \setminus f^{-1}(Z)$ is open $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(Z)$ is closed.

$Y \cap \underbrace{Z^c}_{\text{open}}$

Auf 2. b). $f: X \longrightarrow Y$ injective $\Rightarrow$ f is homeomorphism.

by injectivity and (a), f^{-1} is also continuous

which complete, proof.

Auf 2. c) $g: Y \longrightarrow M^k$ is continuous $\Leftrightarrow$ $g \circ f$ is continuous.

$\Rightarrow$) is clear.

$\Leftarrow$) Y is closed and bounded. $W = g(Y)$

$g: Y \longrightarrow W$

$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$

By $g \circ f$ is continuous and (2. a)

T is closed $\Leftrightarrow$ $(g \circ f)^{-1}(T)$

$f^{-1}(g^{-1}(T))$ is closed $\Leftrightarrow$ $g^{-1}(T)$ is closed.