O-Minimalität – Blatt 7

Abgabe bis zum 2.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)

$f : X \to M^d.$ $(f(x))^\circ \neq \emptyset$

Aufgabe 1 (3+3+3+3 Punkte):

In der Vorlesung haben wir eine Möglichkeit gesehen, die Dimension von definierbaren Mengen $X \subseteq M^n$ zu definieren. Es gibt aber noch viele weitere, äquivalente Möglichkeiten: Zeigen Sie folgendes:

(a) Ist X eine $(i_1, \ldots, i_n)$-Zelle, so ist $\dim X = i_1 + \cdots + i_n$; und ist X eine Vereinigung von Zellen $Z_1, \ldots, Z_k$, so ist $\dim X = \max\{\dim Z_1, \ldots, \dim Z_k\}$.

(b) $\dim X$ ist die größte Zahl d, so dass eine definierbare Injektion von einer nicht-leeren offenen Teilmenge von M^d nach X existiert.

(c) $\dim X$ ist die größe Zahl d, für die eine Projektion $\pi\colon M^n \to M^d$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert, so dass $\pi(X)$ nicht-leeres Inneres hat.

(d) $\dim X$ ist die kleinste Zahl d, so dass eine definierbare Abbildung $f\colon X \to M^d$ existiert, die endliche Fasern hat.

Auf 1. a) $X \subset M^n$ $\dim(X) = d$ $\Rightarrow$ X can portioned to cells $C_1, \ldots, C_n$

$\dim(X) \geq d$

$\dim(X) = \max\{\dim X_i\}_{i=1}^{n}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $1 \leq i \leq n$ $\dim C_i = d$

$\Rightarrow$ there is a projection $\pi : M^n \to M^d$ s.t $\pi(C_i)$ homeomorph. to C_i $\Rightarrow \mathrm{int}(\pi(X)) \neq \emptyset$

$\dim_a(X) \geq d$ $\Rightarrow$ there exist $C \subseteq X$ with $\overset{d'}{\overset{\shortparallel}{\dim_1}}(C) \geq d$

$\pi : M^n \to M^{d'}$

$\pi(C)$ is homeomorphic with cell $\pi(C)$ of type $(1,1,\ldots,1)$

$\mathrm{int}(\pi(C)) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\pi(C) \subseteq \pi(X)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{int}(\pi(C)) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\pi|_X : X \to M^{d'}$ is a definable function, with non-empty interior.

$\Rightarrow$ $\dim(X) \geq d$

$\Rightarrow$ $\dim(X) \geq d$ $\Leftrightarrow$ $\dim_a(X) \geq d$.

$\overset{d'}{\overset{\shortparallel}{\dim_a}}(X) \geq d$ $\Leftrightarrow$ $\dim_b(X) \geq d$

$\Rightarrow]$ $\exists$ $C \subseteq X$ such that C is of type $(i_1, \ldots, i_n)$ s.t $\sum_{j=1}^{n} i_j = d$

$\Rightarrow$ $\pi : M^n \to M^d$ (appropriate projection) $\pi(C) \cong \underset{(1,\ldots,1)\text{-cell}}{C}$

$\pi(C) \xrightarrow{\cong} C \hookrightarrow M^d$

$\Leftarrow]$ $\dim_b(X) \geq d$ $\exists$ $f : \underset{\text{open}}{Y} \subseteq M^d \xrightarrow[\text{injective.}]{} X$

$\Rightarrow$ $f : Y \to f(X)$ is definable bijection.

$Y \subseteq M^d$ is open then by cell-decomposition, there exists $\underbrace{(1,\ldots,1)}_{d\text{-times}}$-cell $C \subseteq Y$

$\dim Y \geq d$ (by Satz. 2.4.4.(c)) $\Rightarrow$ $\dim(f(X)) \geq d$ $\underset{\text{Satz. 2.4.4.(b)}}{\Rightarrow}$ $\dim(X) \geq d$

$\Rightarrow$ $\dim_a(X) \geq d$

$\dim_b(X) \geq d \iff \dim_c(X) \geq d$

$\dim_b(X) \geq d \Rightarrow \exists f : \underset{\text{open}}{Y \subseteq M^d} \xrightarrow{\text{inj}} X \Rightarrow$ there exist cell $C \subseteq X$ of type $(i_1, \ldots, i_n)$ such that $\sum_{j=1}^{n} i_j = d$

$\Rightarrow$ if we projecte on coordinate that $i_j = 1$ then we have the result.

$\dim_c(X) \geq d \Rightarrow \exists \pi : M^n \to M^d \Rightarrow (\pi(X))^\circ \neq \emptyset$

$\Rightarrow \dim(X) \geq d$

$\Rightarrow \dim_b(X) \geq d$

– Let d be as part d. , $f : X \to M^d$

If $\dim(X) \leq d$, then by cell-decomposition and the fact that each cell can injectirly mapped to M^d

$\left(C \to M^{\dim(C)} \hookrightarrow M^d \right)$

$\dim(C) \leq \dim(X) \leq d$

in total, this gives the desired finite to one map of X to M^d.

Let $\dim(X) > d$ and suppose there is $f : X \to M^d$ (finite to one).

By Cor. 2.7.10 (finitness Lemma). there is N such that it bounds the size of all fibers.

then Use definable skolem to Pick up a Point from each fiber and put them in definable set Y_1

repeat this argument N times.

$X = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$

each of Y_i injectivly mapped to M^d (by restriction of f).

on the other hand at least one of these sets Y_i also has

dimension of $> d$.

Put $\dim Y_i = d'$ $\Rightarrow$ there is bijection from box $B \subseteq M^{d'}$

into Y_i $\Rightarrow$ $B \subseteq M^{d'} \xrightarrow[\text{injection}]{} Y_i \xrightarrow[\text{injection}]{} M^d$

$\Rightarrow$ we have bijection from B (non-empty interior)
to a set with empty interior in $M^{d'}$.