hhu Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 6

Abgabe bis zum 26.5.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte):

In dieser Aufgabe sollen ein paar Gegenbeispiele konstruiert werden zu Dingen, die plausibel klingen. Wir arbeiten dazu in $\mathbb{R}$ als L_{ring}-Struktur.

(a) Geben Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine definierbare Funktion $f\colon I \times I \to \mathbb{R}$ an, so dass für jedes feste $a \in I$ sowohl $f(\cdot, a)$ als auch $f(a, \cdot)$ stetig ist, aber so dass f nicht stetig am Punkt $(0, 0)$ ist.

(b) Sei $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ eine $(1, 1, 0)$-Zelle. Man könnte vermuten, dass der Rand ∂Z sich als Vereinigung von $(i_1, i_2, 0)$-Zellen schreiben lässt. Geben Sie eine Beispielzelle Z an, bei der dies falsch ist. Genauer: ∂Z soll ein „senkrechtes Intervall" $\{\underline{a}\} \times I$ enthalten (für ein $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ und ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$).

Anmerkung: Wenn Sie selbst keine solchen Beispiele finden, können Sie evtl. in Analysis-Büchern danach suchen.

Aufgabe 2 (2+3+3 Punkte):

Wie immer soll $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur sein. In dieser Aufgabe wollen wir definierbare Teilmengen von M bis auf definierbare Bijektionen klassifizieren.

(a) Wir wollen jeder definierbaren Menge $X \subseteq M$ eine ganze Zahl $E(X)$ wie folgt zuordnen:
Wenn X sich als disjunkte Vereinigung von n_0 (0)-Zellen (also Punkten) und n_1 (1)-Zellen (also offenen Intervallen) schreiben lässt, definieren wir $E(X) := n_0 - n_1$. Zeigen Sie, dass E wohldefiniert ist. also nicht von der Zerlegung von X in Zellen abhängt.

(b) Seien nun $X, Y \subseteq M$ definierbar. Zeigen Sie: Existiert eine definierbare Bijektion $f\colon X \to Y$, so gilt $E(X) = E(Y)$.
Hinweis: Der Monotoniesatz ist nützlich.

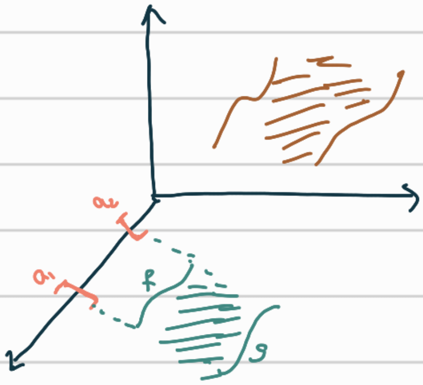
(c) Wir nehmen nun an, dass L die Ringsprache enthält. Zeigen Sie, dass zwischen zwei definierbaren Teilmengen $X, Y \subseteq M$ eine Bijektion existiert genau dann wenn:
- beide Mengen endlich sind und die gleiche Kardinalität haben;
- beide Mengen unendlich sind und $E(X) = E(Y)$ gilt.

Anmerkung: In Blatt 4, Aufgabe 2 (a) wurde gezeigt, dass von jedem offenen Intervall $I \subseteq M$ eine definierbare Bijektion auf das Intervall $(0, 1)$ existiert. Dies können Sie hier verwenden, ohne es nochmal zu beweisen.

Auf1.a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

It's not hard to prove it.

(Auf1)(b): $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ is $(1,1,0)$-cell,



$\{(a,b,h(a,b)) \mid a_1 < a < a_2 \wedge f(a) < b < g(a)\}$

$\partial Z = \overline{Z} \setminus \underbrace{\operatorname{int} Z}_{\emptyset}$

$\Rightarrow \partial Z = \overline{Z}$

$\partial Z = \{(a,b,h(a,b)) \mid a_1 \leq a \leq a_2 \wedge f(a) \leq b \leq g(b)\}$

it always should contain

let $\quad (a_1, a_2) = (0, +\infty)$

$f = 0 \quad g = +\infty \quad h(x,y) = x/y \Rightarrow$

$Z = \{(a,b,\frac{a}{b}) \mid 0 < a < +\infty,\ 0 < b < +\infty\}$ let $c \in (0,+\infty)$

$\lim_{t \to 0} h(t, ct) = c \Rightarrow (0,0,c) \in \overline{Z}$ for all c

$\Rightarrow \{(0,0)\} \times M \subseteq \overline{Z}$

Auf 2.a) $X \subseteq M$ $E(X) = n_0 - n_1$ number of intervals.

number of points

by o-minimality X can be writen as union of points and intervals.

if we want to add a new point to this decomposition, we should choose it from one of the intervals, (for example $c \in (a,b) \Rightarrow$ $(a,b) = (a,c) \cup \{c\} \cup (c,b)$) that increases the number of intervals by one.

Also, if we want to add intervals, we should add same number of new points.

for decreasing points and intervals, the argument is similar.

Auf 2.b) $X, Y \subseteq M$, $f: X \longrightarrow Y$ bijection $\Rightarrow E(X) = E(Y)$

X = union of points and intervals

As f is a bijection, then by monotonacity theorem, the intervals must be mapped to intervals. $\Rightarrow$ number intervals in $X \geqslant$ number of intervals in Y

and by considering f^{-1} we will have ——— " ——— $\leq$ ——— " ———

$\Rightarrow$ $n_1^X = n_1^Y$

Hence f is bijection then $n_0^X = n_0^Y$

$\Rightarrow$ $E(X) = E(Y)$

Auf 2.c) $X, Y \subseteq M$

* In the first case is clear.
* Let X, Y be infinite and $E(X) = E(Y)$

Case 1: $n_0^X = n_1^X \Rightarrow$ f can be defined in a way that maps singel poits of X to singel points of Y from left to write respectivly.

In addition by definition of o-minimality there exist point

$a_0 < a_1 < \dots < a_n$ such that $(a_{i-1}, a_i) \subseteq X$ or $(a_{i-1}, a_i) \cap X = \emptyset$

and $b_0 < b_1 < \dots < b_m$ such that $(b_{i-1}, b_i) \subseteq X$ or $(b_{i-1}, b_i) \cap X = \emptyset$

as $E(X) = E(Y)$ then w.l. we can assume $m = n$

and one can define f in a way that maps intervals from left to write. (By blatt 4, Auf 2.a).

Case 2: $n_0^X < n_0^Y \Rightarrow n_1^X > n_1^Y$

but w.l, we can assume, we are in case 1. because we can devide some intervals in X (as we did in the above) and add some enough new points. such that $n_0^X = n_0^Y$