O-Minimalität – Blatt 13

Abgabe bis zum 14.7.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)

Aufgabe 1 (2+3+3+2+2 Punkte):

Wir scheiben $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d}$ für die Menge all der Quasipolynome $q \in \mathbb{R}[x, e^x]$, die sich in der Form $q = \sum_{i=0}^{n} f_i e^{ix}$ schreiben lassen, wobei $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x]$ Polynome vom Grad höchstens d sind.

(a) Begründen Sie (unter Verwendung, dass $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ o-minimal ist), dass für jedes $n, d \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke existiert für die Anzahl der Nullstellen der Quasipolynome in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$.

Wir wollen nun im Rest der Aufgabe eine explizite solche Schranke finden. Dazu kopieren wir die Methoden aus dem Beweis von Lemma 3.2.13.

(b) Sei r eine (nur fast überall definierte) Funktion der Form $1 + (q(x)/f(x)) \cdot e^x$, für ein $q \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n,d}$ und ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass sich die Ableitung r' schreiben lässt in der Form $(\tilde{q}(x)/f(x)^2) \cdot e^x$, für ein Quasipolynom $\tilde{q} \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n,d+\deg f}$.

(c) Zeigen Sie: Hat die Funktion $\tilde{q}$ aus (b) m Nullstellen, so hat r höchstens $m + 1 + \deg f$ Nullstellen.

(d) Geben Sie eine Formel an, mit der man eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen von Quasipolynomen in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$ erhalten kann, wenn man bereits eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen von Quasipolynomen in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n-1,d'} \setminus \{0\}$ kennt, für ein geeignetes d'.
Hinweis: Jedes Quasipolynom lässt sich schreiben als Produkt eines Polynoms, einer Funktion der Form r aus (b) und einem Faktor der Form e^{kx}.

(e) Folgern Sie, dass ein Quasipolynom in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$ höchstens $(3 \cdot 2^n - 2)d + n$ Nullstellen hat.

a) $\varphi(\underline{a}, b) =$ b is root of Polynomial with coefficient $\underline{a}$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^{nd}$ $\quad \pi^{-1}(\underline{a}) =$ finite

Pay attention, the number of roots is finite so all fibers of above formula is finite. by cell-decomposition, there exist a bound for size of fibers. (we saw it before how cell-decomposition implies this.)

b) $$r'(x) = \frac{\left(\underbrace{q'(x).f(x)}_{\in \mathbb{R}[x,e^x]_{n,d+\deg(f)}} - \underbrace{f'(x)q(x)}_{\in \mathbb{R}[x,e^x]_{n,d+\deg(f)}} + \underbrace{q(x).f(x)}_{\in \mathbb{R}[x,e^x]_{n,d+\deg(f)}}\right)e^x}{f^2(x)}$$

c) As we saw in Lemma 3.2.13 any change of sign corresponds to a root. on the other hand any change of sign of derivative might lead to a main function change of sign, as derivative has m root then the main function might have m+1 roots.

If $-f(x) = q(x).e^x$ then we can find some possible roots.

If $f(x)$, $q(x)e^x$ intersect on x_0 and for $x > x_0$, the sign of their derivatives don't change, they won't intersect again, therefore since the number of possible change of sign of derivative of $f(x)$ is maximum deg(f) then we can find maximum deg(f) + m+1 roots.

d) $q(x) = e^{kx} f_0(x) \cdot \left(1 + \frac{\hat{q}(x)}{f_0(x)} \right)$

$\hat{q} \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n-1,d}$

bound $\leq d + \#N + 1 + d$

$\downarrow$

number of root of $\tilde{q}$ in derivative of $\hat{q}$

$\tilde{q} \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n-1,2d}$.

e) Proof by induction on n.

For $n=0$ trivial.

If it's true for $n-1$ then.

bound for $n \leq (3 \cdot 2^{n-1} - 2) + 2n + n - 1 + 2d + 1$

$= (2 \cdot 3 - 2^{n-1} - 2 \cdot 2 + 2) d + n + 1$

$= (3 \cdot 2^n - 2) d + n$.