O-Minimalität – Blatt 10

Abgabe bis zum 23.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	2 (a)	3 (a)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $X_i \subseteq M^{n_i}$ definierbare Mengen für $i = 1, 2$ und sei $f\colon X_1 \to X_2$ eine definierbare Bijektion (nicht notwendigerweise stetig). Zeigen Sie, dass Triangulierungen $\tau_i\colon X_i \to M^{N_i}$ existieren, so dass f Simplizes von τ_1 auf Simpizes von τ_2 abbildet.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass f stückweise ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $X \subseteq M^n$ definierbar und seien τ_1 und τ_2 zwei Triangulierungen von X. Zeigen Sie, dass dann eine gemeinsame Verfeinerung von τ_1 und τ_2 existiert, d. h. eine Triangulierung τ von X, so dass jeder Simplex von τ_1 und jeder Simplex von τ_2 eine Vereinigung von Simplizes von τ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Wie viele verschiede definierbare Homöomorphietypen gibt es unter den Mengen

$$X_{\underline{a}} = \{(x, y) \in M^2 \mid (x^2 + y^2 - a_1) \cdot ((x-1)^2 + y^2 - a_2) \geq 0\}$$

für $\underline{a} \in M^2$?

Wenn für verschiedene $\underline{a}, \underline{a}'$ die Mengen $X_{\underline{a}}$ und $X_{\underline{a}'}$ definierbar homöomorph sind, brauchen Sie das nur kurz zu begründen. Wenn $X_{\underline{a}}$ und $X_{\underline{a}'}$ jedoch nicht definierbar homöomorph sind, sollten Sie ein präzises Argument dafür geben.

Hinweis: Wenn $X_{\underline{a}}$ und $X_{\underline{a}'}$ definierbar homöomorph sind, dann auch daraus konstruierte Teilmengen wie z. B. $X_{\underline{a}}^{\text{int}}$ und $X_{\underline{a}'}^{\text{int}}$.

Let $X = M^2_{\geqslant 0}$ $\quad Y = \{ (x,y) \mid x,y \geqslant 0 \} \setminus \{0\} \times [0,1)$

define:

$f : X \longrightarrow Y$

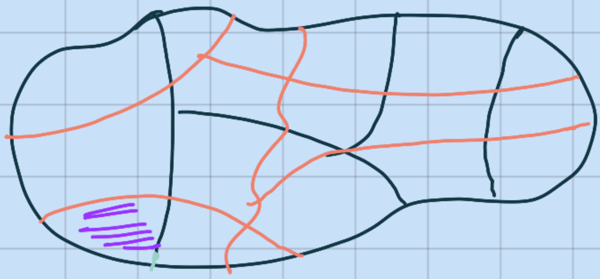
$(x,y) \longmapsto (x,y) \quad x > 0$

$(x,y) \longmapsto (x, y+1) \quad x = 0$

this is a counter example.

Auf 2:

Consider two by two intersection of symplexes of $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ then apply theorem 2.6.4 for this famil of definable sets.

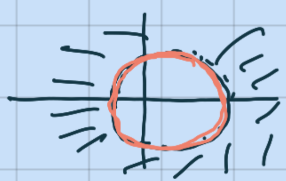


Auf 3:

$$X_{\underline{a}} = \{(x,y)\in M^2 \mid (x^2+y^2-a_1)((x-1)^2+y^2-a_2) \geq 0\}$$

1) If $a_1, a_2 \leq 0$ $\quad X_{\underline{a}} = M^2$

X_1

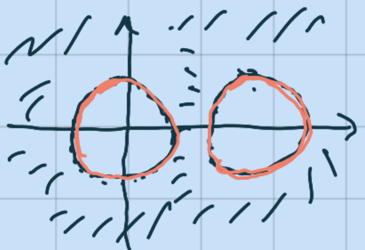


2) If $a_1 \leq 0$, $a_2 > 0$ $\Rightarrow$ $X = M^2 \setminus \{(x,y)\in M^2 \mid (x-1)^2+y^2 < a_2\}$

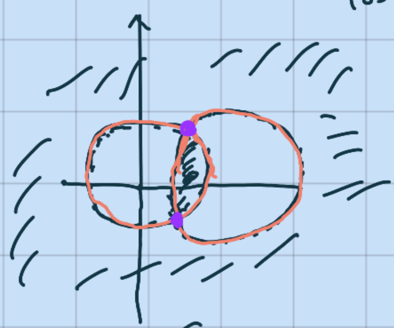
3) If $a_1 > 0$, $a_2 \leq 0$ $\Rightarrow$ $X = M^2 \setminus \{(x,y)\in M^2 \mid x^2+y^2 \geq a_2\}$

3) If $a_1, a_2 > 0$, In this case, we have two circeles which depends on different values of a_1, a_2, one of the followings take places:

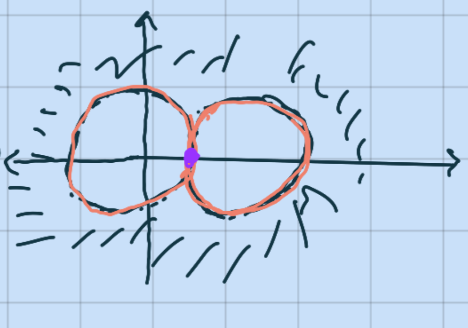
$X_{(4)}$



$X_{(6)}$



$X_{(5)}$



$X_{(7)}$

8) X_8

We know that if $X \sim Y$ is homeomorph then $X \setminus \underbrace{X^{int} \sim Y \setminus Y^{int}}_{\text{red parts}}$

only $\overset{\text{red part}}{4,7}$ have two connected components but X_4 itself has only one connected component but X_7 has two connected component.

red part of 5. 8 both after removing one point, will have two connected component but X_8 after removing one point has (perpel point) has two connected compannent but X_5 after removing perpel point will have one connected component.

X_1 and X_6 are not homeomorphic, since red part in 6 after removing two points has 4 connected component but if two points in one are removed, only we will have two connected component.