Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 1

Abgabe bis zum 21.4.2023, in der Vorlesung

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ (wie in Konvention 1.1.1) eine L-Struktur mit $L_{\mathrm{ord}} \subseteq L$, wobei $<$ eine total-Ordnung auf M ist. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der stetigen Punkte einer definierbaren Funktion $f\colon M \to M$ ist definierbar; dies gilt auch uniform (im gleichen Sinn wie bei Lemma 1.1.3).

(b) Seien $X, Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen mit nicht-leerem Schnitt, die beide definierbar zusammenhängend sind. Zeigen Sie, dass dann auch die Vereinigung $X \cup Y$ definierbar zusammenhängend ist.

(c) Sind $a, b \in M$ zwei verschiedene (feste) Elemente, so gilt: Eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ ist definierbar zusammenhängend genau dann, wenn jede definierbare stetige Funktion $f\colon X \to \{a, b\}$ konstant ist.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Wir betrachten nun $\mathbb{R}$ als L-Struktur für eine beliebige Sprache $L \supseteq L_{\mathrm{ord}}$. Sei $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}$ (als L-Struktur). Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in X$ mit $a < b$ gilt: $[a, b] \subseteq X$.

↳ definition of convex

Zeigen Sie:

(a) Jede definierbar zusammenhängende Teilmenge von M ist konvex.

(b) Jede konvexe definierbare Teilmenge von M ist definierbar zusammenhängend.
Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und formulieren Sie eine geeignete L-Aussage, die in M wahr ist und in $\mathbb{R}$ einen Widerspruch dazu liefert, dass dort jede konvexe Menge zusammenhängend ist.

(c) Für definierbarte Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder von M) gilt: Definierbar zusammenhängend zu sein ist eine uniform definierbare Eigenschaft (im gleichen Sinn wie bei Lemma 1.1.4).

Auf 1. a) Let $\varphi(x, y, \underline{z})$ be a formula such that for each $M' \equiv M$ $\underline{d} \in M'^n$ defines function $f : M' \longrightarrow M'$

a is a continuity points of f,

$\Longleftrightarrow$

$\chi(a, \underline{d}) := \forall z, z', b \quad (\varphi(a, b, \underline{d}) \wedge z < b < z') \longrightarrow \exists x, x' \; (x < a < x')$
$\forall a', b' \quad x < a' < x'$
$(\varphi(a', b', \underline{d}) \longrightarrow z < b' < z')$

Auf 1. b) Let $X \cup Y$ is not def_connected so there are closed definable sets U and V such that $X \cup Y = A \cup B$ $\quad A \cap B = \emptyset$

$X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : x \in X \cap Y$, W.l assume $x \in A$

$X = \underbrace{(A \cap X)}_{\neq \emptyset} \cup (B \cap X) \Rightarrow B \cap X = \emptyset$

Connected $\Bigg\} \Rightarrow B = \emptyset$

$Y = \underbrace{(A \cap Y)}_{\neq \emptyset} \cup (B \cap Y) \Rightarrow B \cap Y = \emptyset$

Connected

:) $A \cup B$ is definably connected.

Auf 1. c) $X \subseteq M^n$ is def-connected. $\Leftrightarrow$ for all definable continuous function $f: X \to \{a,b\}$ is constant.

$\Rightarrow$) If there is non-constant definable function $f: X \to \{a,b\}$

$X = f^{-1}(\{a\}) \cup f^{-1}(\{b\})$ (*)

$f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$, $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, both are definable and closed.

If graph of $y = f(x)$ defines by $\varphi(x,y)$

Pre-image of closed set under continuous function.

$f^{-1}(\{a\}) = \{x \mid \varphi(x,a)\}$

(*) shows that X is not def-connected which is contradiction.

$\Leftarrow$) Assume X is not def-connected, so there are closed definable sets A and B such that $X = A \cup B$ and $A \cap B = \emptyset$

define $f: X \to \{a,b\}$ such that $\forall x \in X$ $f(x) = \begin{cases} a & x \in A \\ b & x \in B \end{cases}$

I) It's not hard to see that f is definable

II) f is continuous, since closed subsets of $\{a,b\}$ are only $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(\{a\}) = A$

$f^{-1}(\{b\}) = B$ $\Rightarrow$ f is continuous.

$f^{-1}(\{a,b\}) = A \cup B$

Auf 2.a) $X \subseteq M$ is definable connected. $\Rightarrow$ X is convex

If X is not convex then $\exists\, a,b$ $a<b$ s.t $[a,b] \not\subseteq X$

$\Rightarrow$ $\exists$ $a<c<b$ s.t $c \notin X$

$X_0 = \{x \in M \mid x \leq c\} \cap X$

$X_1 = \{x \in M \mid x \geq c\} \cap X$

both are closed in X and they are definable. (with parameter).

$X_0 \cap X_1 = \emptyset$ and $X_0 \cup X_1 = X$

Auf 2.b) $X \subseteq M$ is Convex and definable $\Rightarrow$ X is definably connected.

assume X is not def-connected so by remark 1.1.7, it's not def-connected in $\mathbb{R}$ and Also " X is convex " can be writen as a santence so

X in $\mathbb{R}$ is convex but not-def-connected definable set.

then

1) not def-connected $\Rightarrow$ not connected

2) In $\mathbb{R}$ convex subset is connected.

because:

If X is Convex subset of $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ X is path-connected.

(since for each $x,y \in X$ there is $f: [0,1] \longrightarrow X$ $f(0)=x$ and $f(1)=y$

$f(\alpha) = \alpha y + (1-\alpha)x$)

3) By a general Top theorem: Every path-connected set is connected.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X \subseteq \mathbb{R} \text{ is convex } \Rightarrow X \text{ is connected.} \\ \\ X \text{ is not def-connected } \longrightarrow X \text{ is not connected} \end{array} \right\} \ \underline{\text{contradiction}}$$

Solution 2: For simplicity, we first prove it in $\mathbb{R}$

X is convex but not def-connected

by (1.c) there is definable continuous, non-constant function

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $Im(f) = \{-1,1\}$

choose $x, y \in X$ such that $f(x) = 1$ and $f(y) = -1$ w.l. assume $x < y$

since X is convex, we conclude that $[x, y] \subseteq X$

now by intermediate value theorem we know that $[-1, +1] \subseteq f([x, y])$

but as $Im(f) = \{-1, +1\}$ it's not possible.

Now suppose that $\varphi(x, y, \underline{b})$ defines f, for some $\underline{b} \in M^n$,
In $\mathbb{R}$ for every $\underline{b}' \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, y, \underline{b}')$ defines a continuous function,
then IVT holds for that function. This expressible as a L-sentence
so it also holds in M, this means IVT holds for f in M.

$\blacksquare$

Auf 2. c) In (a), (b) we proved that for $M \equiv \mathbb{R}$

$X \subseteq M$ is def- Connected $\Leftrightarrow$ X is convex.

there is formula $\varphi(x, \underline{y})$ such that forsome $\underline{b} \in M$
$\varphi(M, \underline{b}) = X$

$$\chi(\underline{b}) := \forall x, y \quad \varphi(x, \underline{b}) \wedge \varphi(y, \underline{b}) \rightarrow \forall z \quad x < z < y \rightarrow \varphi(z, \underline{b})$$

for $\underline{b} \in M^n$ $\quad$ $\varphi(M, \underline{b})$ is def_connected $\Leftrightarrow$ $M \models \chi(\underline{b})$