Modelltheorie I – Blatt 9

Abgabe am 22.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Auf dem ganzen Blatt sei k ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält.

Aufgabe 1 (1 Punkte):

Zeigen Sie: Für $\underline{a}, \underline{b} \in K^n$ gilt: $\underline{b} \in \{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}$ genau dann, wenn $I(\underline{a}) \subseteq I(\underline{b})$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ algebraisch. Zeigen Sie: Eine irreduzible algebraische Teilmenge $Y \subseteq X$ ist eine irreduzible Komponente von X genau dann, wenn Y in keiner größeren irreduziblen Teilmenge von X enthalten ist.

Aufgabe 3 (1+2+1+1 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ eine algebraische Teilmenge.

(a) Zeigen Sie: Ist X irreduzibel über einem Oberkörper $k' \supseteq k$ (mit $k' \subseteq K$), so ist X auch irreduzibel über k.

(b) Sind $k', k'' \subseteq K$ zwei beliebige algebraisch abgeschlossene Oberkörper von k, so ist X irreduzibel über k' genau dann, wenn es irreduzibel über k'' ist.
Hinweis: Ein Ansatz besteht darin, eine geeignete $L_{\mathrm{ring}}(k)$-Aussage zu betrachten.
Anmerkung: Man nennt X *absolut irreduzibel* oder auch *geometrisch irreduzibel*, wenn es über algebraisch abgeschlossenen Körpern irreduzibel ist.

(c) Zeigen Sie: Ist X absolut irreduzibel, so ist X auch irreduzibel über k.

(d) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (c) die Bedingung, dass k' algebraisch abgeschlossen ist, wirklich notwendig ist.

Aufgabe 4 (1+2+3+1 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ algebraisch, sei $R := k[\underline{x}]/I(X)$, und sei $\pi\colon k[\underline{x}] \to R$ die kanonische Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist J ein Primpideal in R, so ist $\pi^{-1}(J)$ ein Primideal in $k[\underline{x}]$.
(Sie brauchen nicht nochmal zu zeigen, dass $\pi^{-1}(J)$ ein Ideal ist. Das wissen Sie sicher noch aus der Algebra-Vorlesung. ;-))

(b) Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von (a) (und Bemerkung 2.4.21) eine Bijektion erhält zwischen der Menge $\{\mathrm{tp}(\underline{a}/k) \mid \underline{a} \in X\}$ der Typen von Elementen von X und der Menge der Primideale in R.

(c) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass X irreduzibel ist, und sei $\underline{a}$ ein generisches Element von X. Zeigen Sie, dass der Körper $k(\underline{a}) \subseteq K$ isomorph ist zum Brüche-Körper $\operatorname{Frac} R$. (Erinnerung an die Algebra-Vorlesung: Da $I(X)$ prim ist, ist R nullteilerfrei; deshalb existiert $\operatorname{Frac} R$.)
Hinweis: Es gibt einen recht naheliegenden Ring-Homomorphismus von $k[\underline{x}]$ nach $k(\underline{a})$, der den Isomorphismus $R \to k(\underline{a})$ induziert.
Anmerkung: Der obige Brüchekörper $\operatorname{Frac}(k[\underline{x}]/I(X))$ wird üblicherweise mit $k(X)$ bezeichnet.

(d) Folgern Sie, dass man für irreduzible X den Rang rein ringtheoretisch definieren kann: $\operatorname{rk} X = \operatorname{trdeg}((\operatorname{Frac} R)/k)$.

1. $\underline{b} \in \{\underline{a}\}^{zar} \Rightarrow I(\underline{a}) \subseteq I(\underline{b})$

$\underline{b} \in V(\{f \in k[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\})$

$\Rightarrow$ by definition of $I(-)$, it's clear.

12 Jan
10 o'clock
9:30
ms. Hagencamp

max irr set.

2. $Y \subseteq X$ irr-component $\iff$ Y is not in bigger irr.

$X = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n \quad \exists\, i < n \quad Y_1 = Y$

Let there exist Z such that Z is irr, $Y \subseteq Z$

$Z = Z \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} Y_k\right) = \underbrace{(Z \cap Y_1)}_{\text{closed in } Z} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{k=2}^{n} Z \cap Y_k\right)}_{\text{closed in } Z}$

$\Rightarrow Z \cap Y_j = \emptyset \quad j \neq i$

or

$Z \subseteq Y_1 \quad \cancel{X}. \quad Y_i \nsubseteq Y_j$

$\Rightarrow Z \cap Y_1 = \emptyset$

same argument shows $Y_i = Z$.

Y is max irr subset of $X \Rightarrow Y$ is irr-component.

if $Y = Y \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} Y_k\right) = (Y \cap Y_1) \cup \left(Y \cap \bigcup_{k=2}^{n} Y_k\right)$

$Y \cap Y_1 = Y \Rightarrow Y \subseteq Y_1 \xRightarrow{\text{maximal}} Y = Y_1$

if $Y = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ ... continue in the same way.

Auf 3. $X \subseteq K^n$ algebraic. $k \subseteq k' \subseteq K$

X is irr over k' then X irr over k.

if X is not irr over k. $X = Y_1 \cup Y_2$

$Y_1 \neq \emptyset$

$Y_2 \neq \emptyset$

$\Downarrow$

same is true over k'.

b) $k \subseteq k', k'' \models ACF$

X irr $/_{k'}$ $\iff$ X irr $/_{k''}$

$k_1 \equiv_k k_2$

If X is red$/_{k'}$ $\Rightarrow$ it can be writen by first order formula with Parameter from k (Put $\exists$ quantifier for Polynomials which are wittnesses for red.

c) X is irr $/_{k'}$ $k' \models ACF$ $\Rightarrow$ X irr $/_k$

otherwise X is red $/_k$ $\Rightarrow$ X is red $/ k^{alg}$

$\Rightarrow$ X is red $/ k'$

d)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{R} \arrow[dr, no head] & & \mathbb{C} \arrow[dl, no head] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$v(x^2+1)$ is irru/$\mathbb{Q}$ and /$\mathbb{R}$

but redu over $\mathbb{C}$

$R := k[\underline{x}] / I(X) \qquad \pi : k[\underline{x}] \longrightarrow R$
$a \longrightarrow a + I(X)$

a) J prime ideal of $R \qquad J = \frac{J'}{I(X)} \trianglelefteq \frac{k[\underline{x}]}{I(X)}$

$ab \in \pi^{-1}(J)$ from algebra $\Rightarrow$ we remember π is a homomorphism. $\qquad \pi(ab) \in J \Rightarrow \pi(a).\pi(b) \in J$

$\Rightarrow \pi(a) \in J$ or $\pi(b) \in J \Rightarrow \begin{cases} a \in \pi^{-1}(J) \\ b \in \pi^{-1}(J) \end{cases}$

b) 2.9.21 $\qquad$ alg sub set of $k^n \longleftrightarrow$ Radical ideal $k[\underline{x}]$

$S_n(k) \xleftrightarrow{1-1} \{$ irr alg subset of $k^n\} \xleftrightarrow{1-1}$ Prime Ideal of $k[\underline{x}]$

$\{\{\underline{a}\}^{Zar} \mid \underline{a} \in k^n\} \qquad \{I(\{\underline{a}\}) \mid \underline{a} \in k^n\}$

Prime ideal $R =$ Prime ideal of $k[\underline{x}]$ containing $I(X)$.

$\{tp(\underline{a}/k) \mid \underline{a} \in X\}$ $\qquad$ Prime Ideal of $J \trianglelefteq \frac{k[\underline{x}]}{I(X)}$

Prime Ideal containing $I(X)$

$tp(\underline{a}/k) \mid \underline{a} \in X \qquad I(X) \subseteq \pi^{-1}(J) \to$ Prime. $\qquad \frac{\pi^{-1}(J)}{I(X)} \trianglelefteq R$ Prime.

$\{\{\underline{a}\}^{Zar} \mid a \in k^n\} \subseteq X$

$\underline{a} \in X$

c) $k[\underline{x}] \xrightarrow{\varphi} k(\underline{a})$ ring homomorphism.
$f(\underline{x}) \longmapsto f(\underline{a})$

$X = V(\{f \in k[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\})$ irr

$ker(\varphi) = \{f \in k[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\}$

$V(ker(\varphi)) = X$, X irr $\Rightarrow ker\,\varphi$ Prime $\Rightarrow$ radical

$\Rightarrow I(\overbrace{V(ker(\varphi))}^{X}) = ker(\varphi) = I(X)$

$$\Rightarrow \quad \frac{k[\underline{x}]}{\ker\varphi} \cong \underset{\{f(a)\,:\,f\in k[\underline{x}]\}}{\overset{}{\mathrm{Im}(\varphi)}} \quad (\text{first isomorphism theorem}).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Frac}\left(\frac{k[\underline{x}]}{I(x)}\right) \cong k(a)$$

d) $$rk(X) \underset{2.4.23}{=} \dim(\mathrm{ael}_k(\underline{a})) = \dim_k\left(k(a)^{alg}\right) = \mathrm{tr.deg}\left(k(\underline{a})^{alg}/_k\right)$$

$$= \mathrm{tr.deg}\left(\mathrm{Frac}\,R^{alg}/_k\right)$$