Modelltheorie I – Blatt 8

Abgabe am 15.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Auf dem ganzen Blatt sei k ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Für beliebige $F \subseteq k[\underline{x}]$ ist $I(V(F))$ ist ein Ideal, das F enthält.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $I(V(F))$ echt größer ist als das von F erzeugte Ideal.
Anmerkung: Es ist z. B. möglich, ein solches Beispiel zu finden, bei dem $V(F) = \{0\} \subseteq K$ ist.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Ist k auch algebraisch abgeschlossen, so sind die Zariski-abeschlossenen Teilmengen von K genau alle endlichen Teilmengen von k und die gesamte Menge K.

(b) Was ändert sich, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

(c) Ein topologischer Raum heißt hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen haben. Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf K^n „anti-hausdorffsch" ist: Es gibt keine zwei Punkte, die disjunkte offene Umgebungen haben. (Oder, einfacher ausgedrückt: Je zwei offene, nicht-leere Mengen haben nicht-leeren Schnitt.)
Anmkerung: Anschaulich kann man sich das recht schnell plausibel machen, aber wie macht man's formal?

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $K^n \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ eine Kette von Zariski-abgeschlossenenen Mengen, so gibt es ein n, so dass $Y_{n'} = Y_n$ für alle $n' > n$.

(Einen topologischen Raum mit dieser Eigenschaft nennt man noethersch.)

Auf 3) $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow I(Y_2) \supseteq I(Y_1)$

$\downarrow$ clear

$I(Y) = \{f \in k[\underline{x}] \mid f(\underline{x}) = 0 \ \ \forall \underline{x} \in Y\}$

$\Rightarrow$ there exist assending chain $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \cdots$

As $k[\underline{x}]$ is Noeterian then.

$\exists n' \ \forall n \geq n' \quad I(Y_{n'}) = I(Y_{n'+1}) = \cdots$

$\Rightarrow Y_{n'} = Y_{n'+1} = \cdots$

Auf 1. a. $\quad F \subseteq k[\underline{x}] \Rightarrow I(V(F))$ is a Ideal.

$F \subseteq \{g \mid g(\underline{x}) = 0 \ \ \forall \underline{x} \in V(F)\} = I(V(F))$

$\downarrow$ clear

$\Rightarrow$ for all $a, b \in I(V(F)) \quad a - b \in I(V(F))$

for all $a, \in I(V(F)) \quad r \in k[\underline{x}] \Rightarrow r(\underline{x}) \cdot a(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V(F)$

$k[x]$

Auf 1.2. $\quad \langle F \rangle \neq I(V(F)) = \sqrt{\langle F \rangle}$

$F = \{x^3\} \quad \underset{x^3 k[x]}{\langle F \rangle} \neq \underset{x k[x].}{\sqrt{\langle F \rangle}}$

2.a) Consider Ideal I, as I is f.g then $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$

but $f_1, \dots, f_r \in k[x]$ so $\underset{1 \le i \le r}{f_i}$ decompose in linear factor.

$\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in k$ such that

[illegible]

$Y = V(I) = V(f_1, \dots, f_r) = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq k$

↓

common roots of these Polynomials

2.b.) NO the root of $\underset{1 \le i \le r}{f_i}$ may not be in k.

2.c) with the same argument as 2.a) open subsets of

k are $\begin{cases} \phi, \\ k, \\ \text{co-finite subset of } k. \end{cases}$

Let $U_1, U_2 \neq \underset{k}{\phi}$ be open sets then

$U_1 = k \setminus \underbrace{A_1}_{\text{finite}}$ $\qquad U_2 = k \setminus \underbrace{A_2}_{\text{finite}}$

$U_1 \cap U_2 = (k \setminus A_1) \cap (k \setminus A_2) = \underset{\neq \phi}{k \setminus (A_1 \cup A_2)}$