Modelltheorie I – Blatt 6

Abgabe am 1.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Lemma 2.2.10 besagt: Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ beliebige Strukturen, sind $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ Teilmengen und ist $f\colon A \to A'$ eine elementare Bijektion, so lässt sich f zu einer elementaren Bijektion $\operatorname{acl}(A) \to \operatorname{acl}(A')$ fortsetzen.

Der Beweis wurde in der Vorlesung nur skizziert. Füllen Sie die Details aus, mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

Aufgabe 2 (2+3+2+1+1+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper. Ein *affiner Raum* über K ist ein „K-Vektorraum, bei dem man vergessen hat, was der 0-Vektor ist“. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, affine Räume als Strukturen aufzufassen. In dieser Aufgabe machen wir es wie folgt:

Ein affiner Raum über K ist ein K-Vektorraum V, den wir als Struktur in der folgenden Sprache $L_{K\text{-AFF}}$ auffassen: $L_{K\text{-AFF}}$ besteht aus einem zwei-stelligen Funktionssymbol f_λ für jedes $\lambda \in K$, das wie folgt interpretiert wird: $f_\lambda(v, v') := \lambda v + (1 - \lambda)v'$ für alle $v, v' \in V$.

Als erstes wollen wir prüfen, dass V als $L_{K\text{-AFF}}$-Struktur sich wirklich so verhält, wie es soll. Zeigen Sie:

(a) „In einem affinen Raum kann man den Nullpunkt durch Translation überall hinschieben.“ Also: Für $v_0 \in V$ beliebig ist die Abbildung $V \to V, w \mapsto v_0 + w$ ein $L_{K\text{-AFF}}$-Automorphismus von V.

(b) „Wenn man sich doch wieder an die 0 erinnert, hat man wieder einen normalen Vektorraum.“ Also formal: Eine Teilmenge von V^n ist $L_{K\text{-VR}}$-definierbar genau dann, wenn sie $L_{K\text{-AFF}}(\{0\})$-definierbar ist.
Hinweis: Um die Summe $v + v'$ in $L_{K\text{-AFF}}(\{0\})$ auszurücken können Sie zunächst $\frac{v+v'}{2}$ ausdrücken und dann Verdopplung ausdrücken.

Jetzt wollen wir die Modelltheorie von affinen Räumen verstehen. Im Folgenden sei V ein K-Vektorraum, aufgefasst als $L_{K\text{-AFF}}$-Struktur.

(c) Die *affine Hülle* einer Teilmenge $A \subseteq V$ ist definiert als die Menge derjenigen Linearkombinationen von Elementen von A, die Koeffizientensumme 1 haben; also:

$$\operatorname{aff}_K(A) := \{\sum_{i=1}^{\ell} r_i a_i \mid \ell \in \mathbb{N}, r_i \in K, a_i \in A, \sum_{i=1}^{\ell} r_i = 1\}$$

Zeigen Sie: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{aff}_K(A)$.

(d) Zeigen Sie, dass (für festes K) die Theorie AFF_K der unendlichen affinen Räume über K vollständig ist.

(e) Zeigen Sie, dass AFF_K streng minimal ist.

(f) Bestimmen Sie die minimale Dimension eines Modells von AFF_K (in Abhängigkeit davon, ob K endlich oder unendlich ist).

(g) Seien $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei algebraisch abgeschlossene Mengen, die zwei-dimensional im modelltheoretischen Sinn sind (wobei $\mathbb{R}^n$ als $L_{\mathbb{R}\text{-AFF}}$-Struktur aufgefasst wird). Welche Werte können $\dim(A_1 \cap A_2)$ und $\dim(\operatorname{acl}(A_1 \cup A_2))$ annehmen, und wie hängen diese Werte von A_1 und A_2 ab?
Benutzen Sie dies, um ein konkretes Beispiel anzugeben, bei dem bei der Dimensionsformel aus Blatt 5, Aufgabe 3 Gleichheit nicht gilt.

Hinweis: Bei mehreren der obigen Teilaufgaben kann man sich viel Arbeit sparen, indem man die $L_{K\text{-AFF}}$-Frage mit Hilfe von (a) und (b) zu einer $L_{K\text{-VR}}$-Frage übersetzt.

$\varphi : V \longrightarrow V \quad w \longmapsto v_0 + w$

$f_\lambda(\varphi(v), \varphi(v')) = f_\lambda(v + v_0, v' + v_0) = \lambda(v + v_0) + (1-\lambda)(v' + v_0)$

$= \varphi(f(v, v'))$.

$\Rightarrow \varphi_{v_0}$ preserves all the formulas,

b) $W \leq V^n$ is L_{k-VR} def $\iff L_{k-Aff} \cup \{0\}$ - definable. w

$\Leftarrow$ clear (As f_λ is definable in L_{k-VR}).

w is definable in $L_{k-VR} = \{+, \cdot_\lambda : \lambda \in k\}$

for $v_2 = 0 \Rightarrow f_\lambda(v_1, 0) = \lambda v_1 \Rightarrow$ scaller product definable in L_{Aff}

for $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{v_1 + v_2}{2} = f_\lambda(v_1, v_2)$

2. $(v_1 + v_2)$ is definable.

$\Rightarrow$ "$+$" is definable in L_{Aff}

c) $\mathrm{acl}_K(A) := \{ \sum_{i=1}^{\ell} r_i a_i \mid \ell \in \mathbb{N}, r_i \in K \ a_i \in A, \sum_{i=1}^{\ell} r_i = 1 \}$

w.l.o.g. assume that $0 \in A$ (By using an automorphism)

$\Downarrow$

$b \in \mathrm{aff}(A)$, $\varphi(x) : x = \underbrace{\sum r_i a_i}$ $\quad \mathrm{acl}_K(A) =$ linear span A.

$\Rightarrow \quad b \in \langle A \rangle_{\text{linear}}$.

$b \in \mathrm{acl}_A(K) \Rightarrow b \in \varphi(V) \quad |\varphi(V)| < \infty$

$\downarrow$

definable in $L_{\text{aff-}K}$

$\Downarrow$

definable in $L_{VR\text{-}K}$

$\downarrow$

$\sum_{i=1}^{\ell} r_i a_i = x$ (defined b)

$\sum r_i a_i = \sum r_i a_i + 0(1 - \sum r_i)$

$\Rightarrow b \in \mathrm{aff}_K(A)$.

Zeigen Sie: $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{aff}_K(A)$.

(d) Zeigen Sie, dass (für festes K) die Theorie AFF_K der unendlichen affinen Räume über K vollständig ist.

(e) Zeigen Sie, dass AFF_K streng minimal ist.

(d) Take V, W affine space, $(V,0)$, $(W,0)$ are vector space, $(V,0) \equiv (W,0)$ as (Theory of vector space / field is complete).

$\underbrace{\qquad}$ extend language with new constant.

$\Downarrow$

$V \equiv W$ (in reducted language).

e) As any definable set in AFF_k is definable in RV_k and RV_k is strongly minimal, then AFF_k is also, stronly minimal.

$$acl^{AFF}(A) = acl_{\langle 0\rangle}(A)$$

$\Downarrow$

the affine space of a k-dimensional vectorspace has dimension k+1.

$\Rightarrow$

K-affine space (k- infinite) minimum dimension is 2. (we need zero and one non zero vector.)

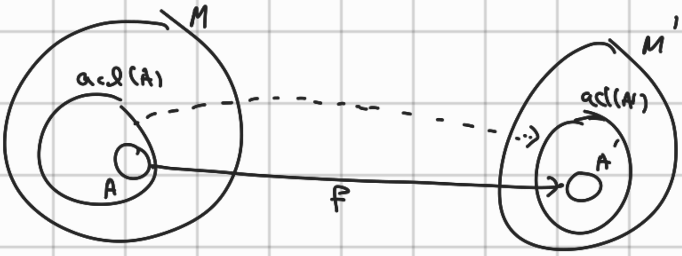
finite is $2^{\aleph_0}$

g) If A and B are Paraller line in V. Then $\dim A + \dim(B) - \dim A \cap B$

$= 2 + 2 + 0$

which is strictly bigger than $\dim(A \cup B) = 3$

Lemma 2.2.10. M, M' beliebige $\overset{el.}{}$ Struktur. $A \subseteq M$, $A' \subseteq M'$, $f: A \to A'$ Elementar. Dann lässt sich f zu einer el. Bij $acl(A) \xrightarrow{1\text{-}1} acl(A')$ fortsetzen



__Bew:__ Skizze: Ist $b \in acl(A)$, so ist $p := tp(b/A)$ alg. also ist auch $f(p)$ alg; also hat $f(p)$ eine Realisierung $b' \in acl(A')$ setze $f(b) = b'$

u.s.w. (d.h transfinite Induksion oder Zornsches Lemma). ∎.

Let $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ be a chain of elementry function. (chain of graph of these function)

then, it's clear that $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha$ is an elementry map. [parameters appear in same step]

Let for maximal subset

$B \subseteq acl(A)$, $B' \subseteq acl(A')$, $f: B \to B'$ elementry,

claim: $B = acl(A)$, $B' = acl(A')$

otherwise $B \neq acl(A)$

$a \in acl(A) \setminus B$ $p = tp(a/B)$ is algebraic also $f(p)$ is algebraic,

which also realized in M' (f is elementry)

name its realization a' and $a' \in acl(A')$ (it's algebraic).

then extend f with $a \to a'$ ⨳.