Modelltheorie I – Blatt 5

Abgabe am 24.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+3+2+1+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, so dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat.

(a) Zeigen Sie, dass für $\underline{a} \in M^n$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) = k$ genau dann, wenn $i_1 < \cdots < i_k$ existieren, so dass $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ algebraisch unabhängig sind und alle restlichen Einträge von $\underline{a}$ in $\mathrm{acl}(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\})$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass für $\underline{a} \in M^n$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) \leq k$ genau dann, wenn eine $\emptyset$-definierbare Menge $X \subseteq M^n$ und eine Projektion $\pi\colon M^n \to M^k$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert mit $\underline{a} \in X$ und so, dass $\pi|_X$ endliche Fasern hat.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

(c) Wir betrachten als Beispiel $\mathcal{M} = \mathbb{C}$ (als L_{ring}-Struktur) und $n = 2$: Sei also $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Was kann man über $\dim(\mathrm{acl}(\{a, b\}))$ sagen, wenn ein nicht-triviales Polynom $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ existiert mit $f(a, b) = 0$, und was kann man über $\dim(\mathrm{acl}(\{a, b\}))$ sagen, wenn kein solches Polynom existiert?

(d) Zurück zur allgemeinen Situation: Zeigen sie: Ist $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und haben $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{a}' \in (M')^n$ den gleichen Typ (über $\emptyset$), so gilt $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) = \dim(\mathrm{acl}(\underline{a}'))$.
Hinweis: Verwenden Sie (b).

(e) Zeige Sie, dass für $0 \leq k \leq n$ gilt: Die Menge

$$\{p \in S_n(\emptyset) \mid \dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) \leq k \text{ für eine beliebige Realisierung } \underline{a} \text{ von } p\}$$

ist eine offene Teilmenge von $S_n(\emptyset)$.
Hinweis: Verwenden Sie (b).

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ ist streng minimal genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ gilt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: Entweder $\#\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$ oder $\#\neg\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$.
Hinweis für $\Rightarrow$: Wenn kein solches k existiert, sollten Sie in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ ein Gegenbeispiel zu streng minimal finden.
Hinweis für $\Leftarrow$: Können Sie zeigen, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ nützliche Aussagen enthält?

(b) Zeigen Sie, dass es reicht, die streng-minimalitäts-Bedingung in einem einzigen $\aleph_0$-saturierten Modell zu prüfen; also genauer: Ist $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert, so ist $\mathcal{M}$ ist genau dann streng minimal, wenn jede definierbare Teilmenge von M endlich oder ko-endlich ist.
Hinweis: Betrachten Sie für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ den partiellen Typ $\Sigma(\underline{y}) = \{\exists^{\geq k} x\colon \phi(x, \underline{y}) \wedge \exists^{\geq k} x\colon \neg\phi(x, \underline{y}) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, so dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat, und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen.

(a) Zeigen sie, dass dann auch $A_1 \cap A_2$ algebraisch abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim(\mathrm{acl}(A_1 \cup A_2)) + \dim(A_1 \cap A_2) \leq \dim A_1 + \dim A_2$.
Anmerkung: Im Gegensatz zum Vektorraum-Fall gilt in dieser Allgemeinheit i. A. nicht Gleichheit.

1.a) $\dim(acl(\underline{a})) = k \iff \exists\, i_1, \dots, i_k \quad a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ alg. ind

$\{a_1, \dots, a_n\} \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \subseteq acl(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$

$acl(\underline{a}) = acl(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$

$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ is a basis.

$\Leftarrow$ clear

$\Rightarrow$) $\dim(acl(\underline{a}))$ then there exist a basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

$B_1 := B \setminus \{b_1\}$

$\exists\, a_{i_1} \in acl(B_1 b_1) \setminus acl(B_1) \overset{GP}{\Rightarrow} \quad b_1 \in acl(B_1 a_{i_1})$

otherwise B_1 is not a basis (It's not alg. ind).

It's clear $B_1 a_{i_1}$ is a basis.

By doing same argument, we can find $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$

which is a basis.

1.b) $\underset{k'}{\dim(acl(\underline{a}))} \leq k \iff X \subseteq M^n \quad \pi : M^n \to M^k$

$\pi|_X$ has finite fiber

$\Leftarrow$)

$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k'}}\}$ is a basis

w.l. consider $\{a_1, \dots, a_{k'}\}$

$a_{k'+1}, a_{k'+2}, \dots, a_n \in acl(\{a_1, \dots, a_{k'}\})$

can be expressed by a singel formula

when k element generate with less than we can find a basis.

For example: $\varphi(a_1, \dots, a_{k'}, a_{k'+1}) \wedge |\varphi(a_1, \dots, a_{k'}, M| = l_{k'+1}$

$\psi(x_1, \dots, x_n) :=$ disjunction of these formuls with out parameters.

$X = \psi(M^n) \qquad \underline{a} \in X$

$\pi : M^n \to M^k$ (projection on first coordinate

$\pi|_X$ has finite fibers.

$X \subseteq M^n$ $\quad \pi|_X$ has finite fiber ; X is defined by $\psi(x_1, \dots, x_n)$

$\underline{a} \in X$ $\quad |\psi(a_1, \dots, a_k, M^{n-k})| < \infty$.

$\Rightarrow \quad \underline{a} \in acl(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow \dim(acl(\underline{a})) \leq k.$

$b \in acl(\{a\})$

1.c) $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ $\quad f(a,b)=0$ $\quad \dim(acl(\{a,b\}))$ $\quad \sqrt{2}, \sqrt{3}$

$0 \underline{\underline{\leq}} \dim(acl(\{a,b\})) \leq 1$ $\quad 3x^2 - 2y^2 = 0$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^{alg}$

$\sqrt{3}$

there is no such a polynomial or $\dim(acl(\{a,b\})) \leq 2$

$a, b \in \mathbb{Q}$ is not the case

but still a or b might be in $\mathbb{Q}^{alg}$

$\dim(acl(\{a,b\})) = 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q}^{alg} \Rightarrow \exists f \; f(a)=0, \; \exists g \; g(b)=0 \Rightarrow fg(a,b)=0$

1.d) $M \equiv M'$ $\quad tp(\underline{a}) = tp(\underline{a}') \Rightarrow \dim(acl(\underline{a})) \underset{(*)}{=} \dim(alg(\underline{b}))$

$\underline{a} \in M^n$ $\quad \underline{a}' \in M'^n$

By $\underline{\underline{b}}$ $\quad \dim(acl(\underline{a})) = k$ can be express by set of formulas

so when $tp(\underline{a}) = tp(\underline{a}')$ then we have $(*)$

$\dim(acl(\underline{a})) \not> k+1$

$\dim(acl(\underline{a})) = k$, $\quad \dim(acl(a)) \geq k$, $\quad$ definable set. $\exists \; X \quad \pi: M^n \to M^k$ $\quad \pi|_X$ has finite fiber.

express by a formula.

express by set of formulas.

1.e) $\{ p \in S_n(\emptyset) \mid \underbrace{\dim(\operatorname{acl}(\underline{a})) \leq k \text{ for any realization of } p}_{} \}$
is open set.

By (b), if expressed by a formula,

$$= \bigcup_{\substack{\varphi \text{ described} \\ \text{above} \\ \text{condition.}}} \Sigma_{\{\varphi\}}$$

(a) Zeigen Sie: Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ ist streng minimal genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, y)$ gilt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: Entweder $\#\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$ oder $\#\neg\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$.
Hinweis für $\Rightarrow$: Wenn kein solches k existiert, sollten Sie in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ ein Gegenbeispiel zu streng minimal finden.
Hinweis für $\Leftarrow$: Können Sie zeigen, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ nützliche Aussagen enthält?

M is strongly minimal $\iff$ for each formula $\varphi(x, \underline{y})$

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall b \in M^n \ \# \varphi(M, \underline{b}) \leq k$$

or

$$\# \neg \varphi(M, b) \leq k.$$

$\Rightarrow$) Let it's not true, for all $k \in \mathbb{N}$ $\exists b \in M^n$ $\# \varphi(M, \underline{b}) \leq k$

$\wedge$

$\# \varphi(M, \underline{b}) > k$

$\psi_k(x) := \# \neg \varphi(M, \underline{b}) > k \wedge \# \varphi(M, \underline{b}) > k$

$\Sigma(x) = \{ \psi_k(\underline{b}) \mid k \in \mathbb{N} \} \cup \text{eiag}(M)$

finitly satisfiable

$\Rightarrow$) $M \prec M'$, $\varphi(M', \underline{b}') \geq k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

$\underline{b}' \in M'$ $\quad \neg \varphi(M', \underline{b}') \geq k$

$\times$

$\Leftarrow$) For each formula φ $\forall b \in M^n$ $\# \varphi(M, \underline{b}) < k$

or

$\# \neg \varphi(M, \underline{b}) < k$

$\downarrow$

Can be written as a first order sentence. which belongs to $Th(M)$

then it's clear that $N \models Th(M)$ is a minimal set.

$\downarrow$

$[*]$ all parameter considered in for all quantifier.

2.b) It's beacause of this fact that the Property of being strong minimal described by a type.

for L-formula, $\psi(x,\underline{y})$ put

$$\Sigma_\psi(\underline{y}) = \{ \exists^{>k}_x \psi(x,\underline{y}) \wedge \exists^{>k} \neg\psi(x,\underline{y}) : \text{for all } k<\omega \}$$

if ψ be a counter example to show that M is not strongly minimal. then this type must be realized is some elementry extension of M.

M is $\aleph_0$-saturated.

M is strongly minimal. , If $N \models Th(M)$, N is not strongly minimal. then There exist $\psi(x,\underline{y})$ s.t $\Sigma_\psi(\underline{y})$ is realized in some el. extension of $N \prec N'$

also $\Sigma_\psi(\underline{y})$ has realization in M. $\cancel{\aleph_0}$.

other direction is clear.

anauther proof for part I. By compactness for all $\psi(x,\underline{y})$, there exits $k_\psi \in \mathbb{N}$ s.t

$M \models \forall \underline{y}\ \exists^{<k}_x \psi(x,\underline{y}) \vee \exists^{<k} \neg\psi(x,\underline{y})$

4.a) $x \in acl(A \cap B) = A \cap B = acl(A) \cap acl(B)$

$\varphi(x, \underline{a})$ $|\varphi(x, \underline{a})| < \infty$ $\Rightarrow$ $x \in acl(A) \wedge x \in acl(B)$

$\underline{a} \in A \cap B$

$A \cap B \subseteq A \to acl(A \cap B) \subseteq acl(A)$ $\Rightarrow$ $acl(A \cap B) \subseteq acl(A) \cap acl(B)$.

$\subseteq acl(B)$

$$\begin{array}{c} A \\ \cap \\ x \in acl(A) \\ x \in acl(B) \\ \cap \\ B \end{array} \to \quad x \in A \cap B \subseteq acl(A \cap B)$$

4.b. recall Lemma. 2.1.22. $\dim B = \dim A + \dim_A B$ $*$

$(*)$ $\dim(acl(A \cup B)) = \dim A + \underset{A}{\dim} A \cup B$

$A \subseteq A \cup B$ $\qquad \geq \dim_A B$

$\Rightarrow$ $\dim(A \cup B) \geq \dim_A B$

$\underbrace{\dim(B \setminus A)}_{= \dim_{A \cap B} B} + \dim A \cap B = \dim B \Rightarrow \boxed{\dim(B \setminus A) = \dim B - \dim(A \cap B)}$

X_1 basis for A extend it to Basis for $A \cup B$, call it Y_1

X_2 basis for B

$Y_1 = Y_2 \cup X_1$ $\qquad$ Y_1 is alg-ind / Also $Y_1 \subseteq acl(X_2) \setminus acl(X_1)$

$|Y_1| \leq \dim(B \setminus A)$

$$\dim(\mathrm{acl}(A\cup B)) = |Y_1| = \underset{\dim A}{\underset{\shortparallel}{|X_1|}} + |Y_2| \leq \dim A + \dim(B\setminus A)$$

$$= \dim(A) + \dim(B) - \dim(A\cap B)$$