Modelltheorie I – Blatt 13

Abgabe am 2.2.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir prüfen, dass T^{eq} nie die Austauscheigenschaft hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass L die leere Sprache (mit einer Sorte) ist, $\mathcal{M}$ eine unendliche Menge und $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Zeigen Sie, dass eine Sorte S von L^{eq} existiert und Elemente $a, b, c \in S^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}$ mit $c \in \mathrm{acl}(\{a, b\}) \setminus \mathrm{acl}(\{a\})$ aber $b \notin \mathrm{acl}(\{a, c\})$.

Anmerkung: Trotzdem macht es Sinn, sich zu fragen, ob acl zumindest in manchen Sorten von T^{eq} die Austauscheigenschaft hat. Dies ist oft der Fall.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$ eine beliebige Parameter-Menge.

~~(a) Geben S~~ie ein Beispiel an, das zeigt, dass $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ mehr Sorten haben kann wenn man es als $L(A)$-Struktur auffasst statt als L-Struktur.

~~(b) Zeigen Si~~e: Hat $\mathcal{M}$ als L-Struktur Imaginären-Elimination, dann hat es auch als $L(A)$-Struktur Imaginären-Elimination.

↳ every def set has code.
it zon
also with parameter
is still a code:

~~Aufgabe 3 (2 Punkte~~):

Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$, so ist auch $\mathcal{M}_1^{\mathrm{eq}} \prec \mathcal{M}_2^{\mathrm{eq}}$.

?

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: In Satz 3.2.14 ist die Partition von X in Teilmengen $X_1, \ldots, X_\ell$ unnötig (es kann $\ell = 1$ gewählt werden), wenn man folgende Annahmen macht:

- In jeder Sorte von L existiert mindestens ein $\emptyset$-definierbares Element; und:
- Es gibt eine Sorte von L, in der zwei $\emptyset$-definierbare Elemente existieren.

~~Aufgabe 5~~ (4 Punkte):

Zeigen Sie: Die angeordnete abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +, -, <)$ hat Imaginären-Elimination.

(Da $\mathbb{Z} = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ist, gilt auch in $\mathbb{Z}^{\mathrm{eq}}$: $\mathbb{Z}^{\mathrm{eq}} = \mathrm{dcl}(\emptyset)$; also ist jedes Element interdefinierbar mit dem leeren Tupel. Warum folgt daraus *nicht*, dass $\mathbb{Z}$ Imaginären-Elimination hat?)

1) $c \in acl(ab) \setminus acl(a)$ but $b \in acl(\{a,c\})$

define $(a,b) \sim (c,d) \iff a=b \wedge c=d \vee a=d \vee c=b$ } the classes of this relation are unordered pairs.

$$M^2/\sim \; = \{ \{a,b\} \mid a,b \in M \}$$

$$\{a\} \in acl(\underbrace{\{a,c\}, \{b,c\}}) \setminus acl(\{a,c\})$$

but

$$\{a,c\} \notin acl(\{\underbrace{\{a\}, \{b,c\}}\})$$

by using these two we can define c and by that we can distinguish a.

here we can not determine "c".

2-a) $(\mathbb{R}, +)$ we should consider a definable subgroup of it such that it can not define without parameter

for example, generated by

definable by type ← non-algebraic number/$\mathbb{Q}$ same as π, 2.b

$R \subset M^2$ eq.rel. with Parameter means. $R^2 \times \{b\} \subseteq M^2 \times \{b\}$ is eq.rel. So with any parameter, it's eq.relatio...

$\forall x$

$\forall x \forall y \begin{cases} \varphi(x,x,b) \\ \varphi(x,y,b) \longleftrightarrow \varphi(y,x,b) \\ \varphi(x,y,b) \wedge \varphi(y,z),b) \longrightarrow \end{cases}$

via φ define new eq.rel with same classes

for other parameter it also $\varphi(x,y,z)$ define an eq.relation

$\varphi(x,y,b)$ $\qquad (x,z) \sim (y,z') \Leftrightarrow z=z' \wedge \varphi(x,y,z)$

Auf 3:

Consider the space $S_{=n}(T^{eq})$. The forgetful map

$\pi : S_{=n}(T^{eq}) \longrightarrow S_n(T)$ is a homeomorphism.

Let $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ be L^{eq} formula, where x_i is from sort S_{E_i}, there is an L-formula $\psi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$ such that

$$T^{eq} \models \forall \bar{y}_1 \ldots \forall \bar{y}_k \quad \psi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) \longleftrightarrow \varphi(f_{E_1}(\bar{y}_1), \ldots, f_{E_k}(y_k))$$

Let n be length of $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$ consider the set $\pi\left(\left[\varphi(f_{E_1}(\bar{y}_1), \ldots, f_{E_k}(\bar{y}_k))\right]\right)$ it is a clopen subset of $S_n(T)$ by above we can find $\psi(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)$ for some formula ψ.

* by part (a) parameter is not important.

Auf 4) these two condition implies that $dcl(\phi) \neq \phi$ and has at least two point.

$dcl(\phi)$ contains two point a, b Let X_i, f_i be as in theorem.

using a, b, we can find some number k and $g_i : M^{k_i} \to M^k$

Such that $g_i(M^{k_i})$ are pair wise disjoint.

we can check $f : M^n \to M^k$ sending $y \in X_i$ to $g_i(f_i(y))$ has all requiered properties.

Auf 5:

$(\mathbb{Z}, 0, +, -, <)$ this argument works for $T = Th(M, <, \dots)$ where $<$ is a total ordering.

Every definable set has a first element since $<$ is a total ordering. Let E be an $\emptyset$-def eq. relation on M^n. Let $f: M^n \longrightarrow M^n$ such that for any $\underline{a}$, $f(\underline{a})$ is a least element of E-class of $\underline{a}$ with respect to lexiogeraphic ordering. Notice f is $\emptyset$-def and for all $\underline{a}, \underline{b}$ we have $f(\underline{a}) = f(\underline{b}) \iff E(\underline{a}, \underline{b})$

not true, since in def 3.2.11 "For each model of T..."
So it should be true for all el. ext of $(\mathbb{Z}, +, 0, <)$

$(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ does not have EI:
definable subset of $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ is $n\mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$.
this is because this structure has auto morphism switch between these sets.

Suppose $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^m$

$f(x) = f(y) \iff x \equiv y \mod n$

rang(f) is definable and has cardinality n, since there is no definable subset of $\mathbb{Z}$ of cardinlity n then $m > 1$

$\pi: \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}$ be projection $\Rightarrow$ $\pi(\text{rang}(f)) \neq \emptyset$ definable subset $\mathbb{Z}$

but no such set exists.

$$\{a,b\} \; \mathrm{acl}(\{a\},\{b\}) \setminus \mathrm{acl}(\{a\})$$

$$\{b\} \in \mathrm{acl}(\{a,b\},\{a\})$$

$$\varphi(\pi(x),\pi(y)) := (\pi(x)=\{a\}) \wedge (\pi(y)=\{b\})$$

$$\{b\} \notin \mathrm{acl}$$

$$\psi(\pi(x)) :=$$