Modelltheorie I – Blatt 12

Abgabe am 26.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

Sei L eine höchstens abzählbare Sprache und T eine total transzendente Theorie.

Zeigen Sie:

(a) T besitzt ein abzählbares $\aleph_0$-saturiertes Modell.
Hinweis: Auch wenn hier nur Typen über endlichen Mengen realisiert werden sollen, kann es nützlich sein, $\aleph_0$-Stabilität zu verwenden.

(b) Ist X eine beliebige definierbare Menge (in einem beliebigen Modell von T), so ist $\mathrm{MR}(X) < \aleph_1$.
Hinweis: Sie können Aufgabe 1 (a) von Blatt 11 verwenden.

(c) Die Schranke $\aleph_1$ aus (b) ist best-möglich, d. h. für jede Ordinalzahl $\beta < \aleph_1$ existiert eine abzählbare Sprache L, eine L-Struktur $\mathcal{M}$ mit total transzendenter Theorie und eine definibare Menge X in $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{MR}(X) = \beta$.
Hinweis: Ein möglicher Ansatz besteht darin, geeignete Äquivalenzrelationen zu definieren.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte):

Sei L die Sprache bestehend aus zwei Sorten P und O und einem Relationssymbol $\dot\in \subseteq P \times O$. Wir fassen einen topologischen Raum X wie folgt als L-Struktur $\mathcal{M}$ auf: $P^{\mathcal{M}} = X$ ist die Menge der Punkte des topologischen Raums; $O^{\mathcal{M}}$ ist die Menge der offenen Teilmengen von X; und $p \mathrel{\dot\in^{\mathcal{M}}} u$ besagt, dass der Punkt $p \in X$ in der offenen Menge $u \subseteq X$ liegt. Wir betrachten nun eine $|\mathcal{M}|^+$-saturierte elementare Erweiterung $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ in dieser Sprache, und wir schreiben $X^* := P^{\mathcal{M}^*}$ für die entsprechende Punktmenge.

Wir sagen, dass ein Punkt $p' \in X^*$ *unendlich nah* an einem Punkt $p \in X$ liegt, wenn für jede offene Umgebung $u \in O^{\mathcal{M}}$ von p gilt: $p' \mathrel{\dot\in} u$. (Hierbei ist „$p' \mathrel{\dot\in} u$“ eine Aussage in $\mathcal{M}^*$; wir verwenden $u \in O^{\mathcal{M}} \subseteq O^{\mathcal{M}^*}$.)

Zeigen Sie:

(a) Ein Punkt $p \in X$ ist isoliert genau dann, wenn der einzige Punkt $p' \in X^*$, der unendlich nah an p liegt, p selbst ist.

(b) X ist kompakt genau dann, wenn „kein Punkt von X^* weit weg von X liegt“, also genauer: wenn jedes $p' \in X^*$ unendlich nah an (mindestens) einem $p \in X$ liegt.
Hinweis für eine Richtung: Aus einer offenen Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat, lässt sich ein partieller Typ konstruieren, der besagt, dass ein Punkt in keiner der Mengen der offenen Überdeckung liegt.
Hinweis für die andere Richtung: Ist $p' \in X^*$ weit weg von jedem Punkt von X, so erhält man daraus auf naheliegende Weise eine Überdeckung von X...

Anmerkung: Um eine bessere Anschauung zu bekommen, können Sie sich z. B. $X = \mathbb{R}$ oder $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ vorstellen.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte):

(a) Sei L eine Sprache mit endlich vielen Sorten und T eine L-Theorie. Geben Sie eine einsortige Sprache L' und eine L'-Theorie T' an, so dass eine Bijektion existiert, die jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ ein Modell $\mathcal{M}' \models T'$ zuornet mit folgenden Eigenschaften:
- $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ haben die gleiche Grundmenge $M = M'$.
- Eine Menge $X \subseteq S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$ (für Sorten $S_1, \ldots, S_n$ von L) ist X L-definierbar genau dann, wenn X (als Teilmenge von $(M')^n$) L'-definierbar ist.

(b) Was geht schief, wenn L unendlich viele Sorten hat?

countable

① T is t.t. $\Rightarrow$ T is ω-stable i.e for $A \subseteq M$ $|S_n(A)| < \omega$

$S_n(A) = \{P_1, P_2, \dots\}$ $|A| < \aleph_0$

1) by compactness $\exists M \prec M_1$ such that P_1 has a realization in M_1

2) By L.S we can assume M_1 is countable.

3) by similar argument we can construct chain

$$M \prec M_1 \prec M_2 \prec \dots$$
$$\Rightarrow N = \bigcup_{i<\omega} M_i$$

Pay attention we do this for all all of finite subset of all of these extensions.

$\rightarrow$ all of these Task can be done in countable steps.

b) T is t.t $\Rightarrow$ $MR(x=x) = \alpha < \infty$

for each $\beta < \alpha$, there is a formula with $MR = \beta$

on the other hand $MR(\varphi(x, \underline{a}))$ depened on $tp(\underline{a})$

means $tp(\underline{a}) = tp(\underline{a}')$ then $RM(\varphi(\underline{x}, \underline{a})) = RM(\varphi(\underline{x}, \underline{a}'))$

so number all possible value of $MR(\varphi(\underline{x}, \underline{a}))$ is maximum $|S_n(T)|$

so the number is maximum $2^{\aleph_0}$

$$|\{RM(\varphi(\underline{x}, \underline{a})) \mid \underline{a} \in M\}| \leq 2^{\aleph_0}$$

$$|\{RM(\varphi(\underline{x}, \underline{a})) \mid \underline{a} \in M\}| = \alpha$$

$$|\alpha| < 2^{\aleph_0} \Rightarrow \alpha < (2^{\aleph_0})^+$$

$$|\alpha| < |S_n(T)| \Rightarrow \alpha < (\aleph_0)^+ = \aleph_1$$

$|S_n(T)| = \aleph_0$

c) $\beta < \omega_1$, there exist a countable language L,

we can construct model M in the language $L_0 = \{E_1, E_2, \dots\}$ such that $MR(M) = n$ $\quad n \leq \omega$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \underbrace{M \sqcup M \sqcup \dots}_{\text{countable copy of } M} \qquad MR(M_1) = \omega + 1$$

$$L_1 = L_0 \cup \{P_i^1\}_{i<\omega}$$

$$M_2 = \underbrace{M_1 \sqcup M_1 \dots}$$

$$L_2 = L_1 \cup \{P_i^2\}_{i<\omega}$$

$$\vdots$$

in limit ordinal steps λ is enough to consider

$$M = \bigcup_{\gamma < \lambda} M_\gamma$$

$p' \in X^*$ infinitly closed to $p \in X$ if for every open neighborhood $u \in O^M$ of p it holds $\underbrace{p' \in u}_{\text{in } M^*}$

1) $p \in X$ is isolated $\Leftrightarrow$ the only $p' \in X^*$ which is infinitly closed to p is p itself.

M^* is $|M|^+$ saturated el. ext of M.

in M it said that p is isolated.

p is isolated $\Rightarrow$ $\exists u \in O \quad \forall x \in X \quad x \in u \to x = p$ (consider it in M^*)

p' is infinitly closed to p means $\forall u \in O \quad p \in u \to p' \in u$ (in M^*) $\Big\} \Rightarrow p = p'$

consider witness of first formula u^* as u, $\quad p \in u^* \xrightarrow[\text{second}]{} p' \in u^* \xrightarrow[\text{first}]{} p' = p$

$\underbrace{p' \text{ infinite closed to } p}_{} \to p = p' \Rightarrow p$ is isolated. / Assume p is not isolated.

$P\left(\dfrac{p'}{\{p\} \cup O^m}\right) = \{ p \neq p' \wedge p \in u \wedge p' \in u \}$ It's consisten $\Rightarrow$ has realization $p^* \in M^*$

p^* is infinitly closed to p

but not equal

to p $\times$

b) X is compact $\Leftrightarrow$ if every $p' \in X^*$ infinitly closed to one point $p \in X$.

$(\Leftarrow)$ suppose X is not compact then there is an open covering $\{u_\alpha\}$ s.t

it doesn't have finite subcover

$P(p) = \{ \quad \neg(p \in u_{\alpha_1} \vee p \in u_{\alpha_2} \vee \dots \vee p \in u_{\alpha_n}) \}$

$\exists\, p_0 \in X^*$ such that $p_0 \notin \bigcup u_\alpha^{M^*}$

p_0 infinitly closed to at least one point p_0'

on the other hand there is u_α such that $M \models p_0 \in u_\alpha$

$\Rightarrow \quad M^* \models p_0 \in u_\alpha$

$\Rightarrow M^* \models p_1 \in u_\alpha$ contradiction

$\Rightarrow X$ is compact, otherwise there is p' such that p' is not infinitly closed to any point of X.

for each $p \in X$, there is U_α such that $p \in U_\alpha^{M^*} \wedge p' \notin U_\alpha^{M^*}$

$\mathcal{C} = \{U_\alpha\}$ is a covering.

claim: $\mathcal{C}$ doesn't have finite sub-cover.

otherwise we can find $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ finite sub cover.

$$M \models \forall p \bigvee_{i=1}^{n} p \in U_{\alpha_i}$$

$$\Downarrow$$

$$M' \models \text{———} \text{"} \text{———}$$

$\Rightarrow$ there exists $1 \le i \le n$ $p' \in U_{\alpha_i}$ $\lightning$

3.a) $L' = \{$ one, predicate corresponding to each sort$\}$ $\cup \{$ symbols of all sorts internal $\}$ $\cup \{$ function and relation symbols between sorts$\}$

T is L-theory

$T' = \{$ sentence asserted that all elements has a sort $\}$ $\quad M = M'$

for example: $\forall x \bigvee_{i=1}^{n} P_i(x)$

$$X \subseteq S_1^M \times \dots \times S_n^M$$

$$\downarrow$$

$$\varphi(x^{s_1}, x^{s_2}, \dots, x^{s_n}) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

b) "In first order sentence, is not possible to say all elements has a sort."

It cause also compactness fail