Modelltheorie I – Blatt 10

Abgabe am 12.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+6 Punkte):

(a) Zeigen Sie (in beliebigen kommutativen Ringen mit 1): Maximale Ideale sind Primideale.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen an Elemente $\underline{a} \in K^n$ äquivalent sind:
   (a) Das Ideal $I(\{\underline{a}\})$ ist maximal.
   (b) $\operatorname{rk}(\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}) = 0$.
   (c) $\underline{a} \in (k^{\mathrm{alg}})^n$
   (d) Alle Elemente von $\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}$ haben den gleichen Typ über k.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wie in Aufgabe 3 von Blatt 7 sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, $X \subseteq M^n$ eine unendliche[1] definierbare Menge und $f\colon X^2 \to X$ eine injektive definierbare Abbildung. (Wir hatten damals u. A. gesehen, dass solch ein X im Körper $M = \mathbb{F}_p(t)$ existiert.)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{MR}(X) = \infty$ ist.

Hinweis: Sie können z. B. annehmen, dass $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ ist und dann einen Widerspruch erhalten, indem Sie zeigen, dass $\mathrm{MR}(X) \geq \alpha + 1$ ist.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):

Sei $L = \{\sim\}$ und $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, wobei $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, die für jede natürliche Zahl $\ell \geq 1$ genau eine Äquivalenzklasse mit ℓ Elementen hat (und keine weiteren Äquivalenzklassen).

(a) Zeigen Sie, dass M nicht $\aleph_0$-saturiert ist und geben Sie eine $\aleph_0$-saturierte elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ an.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{MR}(M)$. Würde man das richtige Ergebnis erhalten, wenn man die Definition des Morley-Rangs in $\mathcal{M}$ selbst anwendet?

(c) Zeigen Sie, dass acl in $\mathrm{Th}(M)$ die Austauscheigenschaft hat. Gilt $\mathrm{MR}(M) = \operatorname{rk}(M)$?
Erinnerung: Nach Aufgabe 4 von Blatt 4 reicht es, die Austausch-Bedingung in einem einzigen $\aleph_0$-saturierten Modell zu prüfen.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT1-V-W23/

[1] Das Wort „unendlich“ hatte ich auf Blatt 7 vergessen.

1.a] M is maximal ideal. Let M is not prime so there exist $a,b \neq 0 \in R$ $a,b \notin M$ but $ab \in M$.

$$M \subsetneq \underbrace{\langle M, a \rangle = R}_{\text{as } M \text{ is maximal}} \Rightarrow 1 = \sum r_i m_i + sa$$

$$\Rightarrow b = \underbrace{\sum r_i m_i \cdot b}_{\in M} + \underbrace{sab}_{\in M} \Rightarrow b \in M$$

1.b) (1) $I(\underline{a})$ is maximal.

(2) $rk(\{a\}^{Zar}) = 0 \longrightarrow v(I(\underline{a})) = v(\{f \mid f(\underline{a}) = 0\}) \rightarrow$ It's irreducible. as I is prime

(3) $a \in (k^{alg})^n$

(4) $\{a\}^{Zar}$ have same generic type.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Kor 2.4.27:

1) $I(\{\underline{a}\}) = I(\{a\}^{Zar})$ As $I(\underline{a})$ is maximal.

then $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d \subseteq X$

length of this chain is zero. $\Rightarrow rk(\{\underline{a}\}^{Zar}) = 0$

Cor 2.4.27

(2) $\Rightarrow$ (3)

$rk(\{\underline{a}\}^{Zar}) = 0$

$\shortparallel$ by Lemma 2.4.23

$\dim_k acl_k(\underline{a}) = 0 \Rightarrow \underline{a} \in (k^{alg})^n$

(3) $\Rightarrow$ (4)

$\underline{a} \in (k^{alg})^n \Rightarrow$ all elements of $\{\underline{a}\}^{Zar}$ have same type over k.

$$\{\underline{a}\}^{Zar} = \{\underline{a}'\}^{Zar} \Leftrightarrow tp(\underline{a}/k) = tp(\underline{a}'/k)$$

$\underline{a} \in (k^{alg})^n \Rightarrow a' \in \{\underline{a}\}^{zar} \Rightarrow \{\underline{a}'\}^{zar} = \{\underline{a}\}^{zar}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V(\{f \mid f(\underline{a}) = 0\})$

$\exists P \in k[\underline{x}] \quad P(\underline{a}) = 0 \Rightarrow tp(\underline{a}), tp(\underline{a})$ are algebraic

so they are isolated. $\Rightarrow tp(\underline{a}/k) = tp(a'/k)$

$(4) \Rightarrow (1)$ clear by remark 2.4.2)

$S_n(k) \longleftrightarrow \{$ irr. alg subset of $k^n\} \longleftrightarrow I(\{a\})$

$\{\{\underline{a}\}^{zar} \mid \underline{a} \in k^n\} \longleftrightarrow I \subsetneq J$

not maximal.

$tp(\underline{b}/k) \neq tp(\underline{a}/k) \longleftrightarrow \{\underline{b}\}^{zar} \not\subseteq \{\underline{a}\}^{zar}$

$J \supsetneq I(\{\underline{a}\}^{zar})$

types of $V(J)$ and outside of $V(J)$ different from each other.

2) $f: X^2 \longrightarrow X$ definable bijection.

(3.a) $X \subseteq M^n$ $\quad f: X^2 \longrightarrow X$ inj-def

$rk(X^2) = 2 rk(X)$

$rk(\text{each fiber}) = 0 \implies rk(X^2) = rk(X) + 0$

$\implies rk(X) = 0 \implies \underbrace{X = \emptyset}_{\text{we need to assume } X \neq \emptyset.}$ or X finite X.

$MR(X) = \alpha \implies$ By Remark 2.9.4

$MR(X) = MR(X^2)$ but

$$X^2 = \bigcup_{x \in X} \underbrace{\{x\} \times X}_{\substack{\text{definable set} \\ \text{and disjoint.}}}$$

$\implies MR(X^2) = MR(X) \geq \alpha + 1$

3. $L = \{\sim\}$ from each l, $\sim$ has exactly one equivalence class of size l.

$M \preceq M'$
$\downarrow$

$$\varphi_n(x) = \exists y_1 y_2 \dots, y_n \text{ s.t } \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} x \sim y_i$$

a) $P_1(x) = \{\varphi_n(x)\}$

P doesn't realize in M.

$M_1 =$ By compactness there is an extension contains one infinite class $Th(M) \cup P(x)$ is finitly satisfiable.

Choose c from infinit class.

$P_2(x) = \{ x \not\sim c, \wedge \varphi_n(x)\}$
This type doesn't satisfies in M_1
By compactness we can construct M_2 with two infinite eq. class.

By continuing we can find $M' \succ M$ s.t M' has infinite class with infinite element which is $\aleph_0$-saturated

$MR(M) = 2$ $\quad$ $MR(M') \geq 0$ $\quad M \neq \emptyset$
$\quad$ " $\quad$ since. $MR(M') \geq 1 \longrightarrow$ all finite classes.
$RM(M')$ $\quad$ $MR(M') \geq 2 \longrightarrow$, all of infinit classes.

$rk(M) = 1$

...

$acl(A)$ = union of eq. classes contains elements of $a \in A$

So checking EP is clear.