Modelltheorie I – Blatt 9

Abgabe am 22.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Auf dem ganzen Blatt sei k ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält.

Aufgabe 1 (1 Punkte):

Zeigen Sie: Für $\underline{a}, \underline{b} \in K^n$ gilt: $\underline{b} \in \{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}$ genau dann, wenn $I(\underline{a}) \subseteq I(\underline{b})$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ algebraisch. Zeigen Sie: Eine irreduzible algebraische Teilmenge $Y \subseteq X$ ist eine irreduzible Komponente von X genau dann, wenn Y in keiner größeren irreduziblen Teilmenge von X enthalten ist.

Aufgabe 3 (1+2+1+1 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ eine algebraische Teilmenge.

(a) Zeigen Sie: Ist X irreduzibel über einem Oberkörper $k' \supseteq k$ (mit $k' \subseteq K$), so ist X auch irreduzibel über k.

(b) Sind $k', k'' \subseteq K$ zwei beliebige algebraisch abgeschlossene Oberkörper von k, so ist X irreduzibel über k' genau dann, wenn es irreduzibel über k'' ist.
Hinweis: Ein Ansatz besteht darin, eine geeignete $L_{\mathrm{ring}}(k)$-Aussage zu betrachten.
Anmerkung: Man nennt X *absolut irreduzibel* oder auch *geometrisch irreduzibel*, wenn es über algebraisch abgeschlossenen Körpern irreduzibel ist.

(c) Zeigen Sie: Ist X absolut irreduzibel, so ist X auch irreduzibel über k.

(d) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (c) die Bedingung, dass k' algebraisch abgeschlossen ist, wirklich notwendig ist.

Aufgabe 4 (1+2+3+1 Punkte):

Sei $X \subseteq K^n$ algebraisch, sei $R := k[\underline{x}]/I(X)$, und sei $\pi\colon k[\underline{x}] \to R$ die kanonische Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist J ein Primpideal in R, so ist $\pi^{-1}(J)$ ein Primideal in $k[\underline{x}]$.
(Sie brauchen nicht nochmal zu zeigen, dass $\pi^{-1}(J)$ ein Ideal ist. Das wissen Sie sicher noch aus der Algebra-Vorlesung. ;-))

(b) Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von (a) (und Bemerkung 2.4.21) eine Bijektion erhält zwischen der Menge $\{\mathrm{tp}(\underline{a}/k) \mid \underline{a} \in X\}$ der Typen von Elementen von X und der Menge der Primideale in R.

(c) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass X irreduzibel ist, und sei $\underline{a}$ ein generisches Element von X. Zeigen Sie, dass der Körper $k(\underline{a}) \subseteq K$ isomorph ist zum Brüche-Körper $\mathrm{Frac}\, R$. (Erinnerung an die Algebra-Vorlesung: Da $I(X)$ prim ist, ist R nullteilerfrei; deshalb existiert $\mathrm{Frac}\, R$.)
Hinweis: Es gibt einen recht naheliegenden Ring-Homomorphismus von $k[\underline{x}]$ nach $k(\underline{a})$, der den Isomorphismus $R \to k(\underline{a})$ induziert.
Anmerkung: Der obige Bruchekörper $\mathrm{Frac}(k[\underline{x}]/I(X))$ wird üblicherweise mit $k(X)$ bezeichnet.

(d) Folgern Sie, dass man für irreduzible X den Rang rein ringtheoretisch definieren kann: $\mathrm{rk}\, X = \mathrm{trdeg}((\mathrm{Frac}\, R)/k)$.