Modelltheorie I – Blatt 7

Abgabe am 8.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte):

Sei T die Theorie von $\mathbb{Z}$ in der Sprache $L = \{<, s\}$, wobei s die Nachfolgerfunktion ist. Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden:

- T hat Quantorenelimination.
- Die Modelle von T sind genau die Strukturen der Form $M = Q \times \mathbb{Z}$, wobei Q eine angeordnete Menge ist, die Anordnung auf M die lexikographische Ordnung ist (d. h. $(q, n) < (q', n') \iff q < q' \vee (q = q' \wedge n < n')$) und $s(q, n) = (q, n + 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.
Hinweis: Für $A \subseteq M$ lässt sich $\operatorname{acl}(A)$ leicht explizit angeben.

(b) Bestimmen Sie die Dimension eines Modells $M = Q \times \mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von Q.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $X_{a,b} := \{(x, y) \in M^2 \mid a < x < y < b\}$ in Abhängigkeit von $a, b \in M$. Kann man immer in M selbst einen Zeugen für den Rang von $X_{a,b}$ finden?

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Wir nehmen an, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ die Austauscheigenschaft hat. Zeigen Sie: Eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ hat Rang $\geq d$ genau dann, wenn eine Koordinatenprojektion $\pi \colon M^n \to M^d$ existiert, so dass $\pi(X)$ Rang d hat.

Anmerkung: Das geht wahlweise mit Satz 2.3.5 oder direkt mit der Definition des Rangs.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

(a) Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur. Wir nehmen an, dass eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ existiert und eine injektive definierbare Abbildung $f \colon X^2 \to X$.
Zeigen Sie, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ nicht die Austauscheigenschaft hat.

(b) Sei nun $\mathcal{M} = \mathbb{F}_p(t)$, d. h. der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten im endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Wir fassen $\mathcal{M}$ als L_{ring}-Struktur auf. Geben Sie eine injektive definierbare Abbildung $M^2 \to M$ an (und folgern Sie, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ nicht die Austauscheigenschaft hat).
Hinweis 1: Es kann nützlich sei zu zeigen, dass für jedes $a \in M$ die p-te Potenz a^p im Unterkörper $\mathbb{F}_p(t^p)$ liegt.
Hinweis 2: $\mathbb{F}_p(t^p)$ ist so klein, dass $(\mathbb{F}_p(t^p))^2$ in $\mathbb{F}_p(t)$ reinpasst; warum?

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei T eine vollständige Theorie.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass es in der Definition von $\exists^\infty$-Elimination nicht reicht, ein einzelnes Modell von T zu betrachten. Gesucht ist also eine Struktur $\mathcal{M}$, in der die Bedingung aus Definition 2.3.7 gilt, aber so dass die Bedingung nicht in allen $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es bei der Charakterisierung von $\exists^\infty$ aus Lemma 2.3.8 reicht, ein einzelnes Modell zu betrachten; also: Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, und existiert für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine natürliche Zahl N, so dass $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ entweder unendlich ist oder Kardinalität kleiner N hat für alle $\underline{b} \in M^n$, so eliminiert $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ $\exists^\infty$.