Modelltheorie I – Blatt 3

Abgabe am 10.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper, sei $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$ die Sprache der K-Vektorräume, und sei T die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der K-Vektorräume, die als Menge unendlich sind. (Zur Erinnerung: Diese Theorie ist vollständig und hat Quantoren-Elimination.)

(a) Wie viele abzählbare Modelle besitzt T bis auf Isomorphie? Unter welchen Bedingungen an K ist T $\aleph_0$-kategorisch?

(b) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Die Menge $S_1(A)$ der 1-Typen über A besteht aus:
- einem Typ p_b für jedes Element $b \in \langle A \rangle_K \dots$
- ... und genau einem weiteren Typ p_∞.

(c) Welche der Typen aus (b) sind isoliert und welche nicht? (Dies hängt evtl. von K ab.)

(d) Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $S_1(A)$.
Hinweis: Die Antwort ist so was wie: Für jede endliche Teilmenge von $\langle A \rangle_K$ gibt es genau xxx abgeschlossene Teilmengen, nämlich yyy. (Wobei xxx und yyy möglicherweise von K abhängen.)

(e) Wir nehmen nun an, dass K so ist, dass T $\aleph_0$-kategorisch ist. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine obere Abschätzung für die Anzahl $|S_n(T)|$ der n-Typen an.[1]

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei T $\aleph_0$-kategorisch (in einer abzählbaren Sprache L). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f(n)$ die Anzahl der L-Formeln in n Variablen bis auf Äquivalenz modulo T. Wie hängt $f(n)$ mit der Anzahl $|S_n(T)|$ der n-Typen zusammen?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Laut dem Satz von Ryll-Nardzewski ist eine Theorie in einer abzählbaren Sprache $\aleph_0$-kategorisch, wenn für *alle* $n \in \mathbb{N}$ der Typenraum $S_n(T)$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dieses „alle“ wirklich nötig ist, d. h. geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel einer Theorie an, die nicht $\aleph_0$-kategorisch ist, in der es aber nur endlich viele n-Typen gibt.

Hinweis: Fangen Sie damit an, dies im Fall $n = 1$ zu machen. Man kann z. B. versuchen, dafür zu sorgen, dass jedes einzelne Element eines Modells den selben Typ hat, aber dass Paare von Elementen verschiedene Typen haben können.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W20/

[1] Wenn Sie wollen, können Sie die Anzahl auch genau bestimmen. Ich will's gerade nicht...