

Modelltheorie I – Blatt 10

Abgabe am 12.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+6 Punkte):

- (a) Zeigen Sie (in beliebigen kommutativen Ringen mit 1): Maximale Ideale sind Primideale.
- (b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen an Elemente $\underline{a} \in K^n$ äquivalent sind:
 - (a) Das Ideal $I(\{\underline{a}\})$ ist maximal.
 - (b) $\text{rk}(\{\underline{a}\}^{\text{Zar}}) = 0$.
 - (c) $\underline{a} \in (k^{\text{alg}})^n$
 - (d) Alle Elemente von $\{\underline{a}\}^{\text{Zar}}$ haben den gleichen Typ über k .

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wie in Aufgabe 3 von Blatt 7 sei \mathcal{M} eine Struktur, $X \subseteq M^n$ eine unendliche¹ definierbare Menge und $f: X^2 \rightarrow X$ eine injektive definierbare Abbildung. (Wir hatten damals u. A. gesehen, dass solch ein X im Körper $M = \mathbb{F}_p(t)$ existiert.)

Zeigen Sie, dass $\text{MR}(X) = \infty$ ist.

Hinweis: Sie können z. B. annehmen, dass $\text{MR}(X) = \alpha$ ist und dann einen Widerspruch erhalten, indem Sie zeigen, dass $\text{MR}(X) \geq \alpha + 1$ ist.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):

Sei $L = \{\sim\}$ und \mathcal{M} eine L -Struktur, wobei \sim eine Äquivalenzrelation ist, die für jede natürliche Zahl $\ell \geq 1$ genau eine Äquivalenzklasse mit ℓ Elementen hat (und keine weiteren Äquivalenzklassen).

- (a) Zeigen Sie, dass \mathcal{M} nicht \aleph_0 -saturiert ist und geben Sie eine \aleph_0 -saturierte elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ an.
- (b) Bestimmen Sie $\text{MR}(\mathcal{M})$. Würde man das richtige Ergebnis erhalten, wenn man die Definition des Morley-Rangs in \mathcal{M} selbst anwendet?
- (c) Zeigen Sie, dass acl in $\text{Th}(\mathcal{M})$ die Austausch-eigenschaft hat. Gilt $\text{MR}(\mathcal{M}) = \text{rk}(\mathcal{M})$?
Erinnerung: Nach Aufgabe 4 von Blatt 4 reicht es, die Austausch-Bedingung in einem einzigen \aleph_0 -saturierten Modell zu prüfen.

¹Das Wort „unendlich“ hatte ich auf Blatt 7 vergessen.