Einführung in die Modelltheorie – Blatt 8

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Seien $K_0 \subseteq K$ Körper und sei $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq K$ eine endliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) A ist algebraisch unabhängig über K_0.

(b) Für jedes i ist a_i transzendent über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$

(c) Für jedes i ist a_i transzendent über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Hinweis für die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a): Wenn $\{a_1, \dots, a_i\}$ algebraisch abhängig über K_0 ist aber $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ algebraisch unabhängig, dann ist a_i algebraisch über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Hinweis für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b): Wenn a_i algebraisch wäre, hätte man ein Polyom mit Koeffizienten in dem Körper $K_0(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Jeden dieser Koeffizienten kann man selbst als Quotient von gewissen Polynomen schreiben. Die Nenner kann man aber alle wegmultiplizieren.

Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

—

(c) $\Rightarrow$ (a):
Annahme, A ist algebraisch abhängig. Wähle i minimal so, dass ein Polynom $f \in K_0[x_1, \dots, x_i] \setminus \{0\}$ existiert mit $f(a_1, \dots, a_i) = 0$. Setze $K_1 := K_0(a_1, \dots, a_{i-1})$. Dann ist also $\tilde{f}(y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, y) \in K_1[y]$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass $\tilde{f}$ (als Polynom in $K_1[y]$) nicht das 0-Polynom ist; dann haben wir wegen $\tilde{f}(a_i) = f(a_1, \dots, a_i) = 0$ einen Widerspruch dazu, dass (nach (c)) a_i transzendent über K_1 ist.

Bew dass $\tilde{f}$ nicht das 0-Polynom ist: Wir können $\tilde{f}$ schreiben als $\tilde{f}(y) = \sum_{j=0}^{k} g_j(a_1, \dots, a_{i-1}) y^j$, für Polynome $g_j \in K_0[x_1, \dots, x_{i-1}]$. Da f nicht das Nullpolynom ist, ist mindestens eins der g_j nicht das Nullpolynom. Da wir i minimal gewählt hatten, kann $g_j(a_1, \dots, a_{i-1})$ nicht 0 sein.

—

(a) $\Rightarrow$ (b):

Ohne Einschränkung können wir $i = n$ annehmen (um die Notation zu erleichtern).

Annahme, a_n ist algebraisch über $K_1 := K_0(a_1, \dots, a_{n-1})$. Dann existiert also ein $f = \sum_j b_j x_n^j \in K_1[x_n] \setminus \{0\}$ mit $f(a_n) = 0$. Die Koeffizienten von f sind von der Form $b_j = g_j(a_1, \dots, a_{n-1})/h_j(a_1, \dots, a_{n-1})$, für Polynome $g_j, h_j \in K_0[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Indem wir das Polynom f mit $\prod_j h_j(a_1, \dots, a_{n-1})$ durchmultiplizieren, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $b_j = g_j(a_1, \dots, a_{n-1})$ ist.

Jetzt können wir f als Polynom in $x_1, \dots, x_n$ auffassen; genauer: $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) := \sum_j g_j(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^j \in K_0[x_1, \dots, x_n]$. Da $\tilde{f}$ nicht das Nullpolynom ist und $\tilde{f}(a_1, \dots, a_n) = 0$ ist, erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass A algebraisch unabhängig ist.

Aufgabe 2 (1+1+1+2 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir Hilberts Nullstellensatz beweisen.

Zeigen Sie:

(a) Sind K und K' algebraisch abgeschlossene Körper, die einen gemeinsamen Unterkörper K_0 besitzen, und ist $|K| = |K'| > |K_0|$, so sind K und K' isomorph über K_0.
Hinweis: Kombinieren Sie zwei Resultate aus der Vorlesung.
Nach Kor. 2.4.9 reicht es zu zeigen, dass K und K' Transzendenzbasen der gleichen Kardinalität haben. Aus Lemma 2.4.7 folgt, dass Transzendenzbasen die Kardinalität $|K|$ haben müssen.
Nachtrag: In der Aufgabe hätte als zusätzliche Annahme stehen sollen, dass K_0 unendlich ist. Sonst kann man Lemma 2.4.7 nicht anwenden, und die Behauptung ist sogar falsch, wie man am Beispiel $K_0 := \mathbb{F}_p$, $K = \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ und $K' = (\mathbb{F}_p(x))^{\mathrm{alg}}$ sieht. (Das Element $x \in K'$ ist transzendent über $\mathbb{F}_p$; K enthält keine Elemente, die transzendent über $\mathbb{F}_p$ sind. Also sind sie nicht isomorph.)

(b) Seien nun $K_0 \subseteq K$ zwei algebraisch abgeschlossene Körper. Zeigen Sie, dass K bereits eine elementare Erweiterung von K_0 ist.
Hinweis: Betrachten Sie in der Sprache $L_{\mathrm{ring}}(K_0)$ eine Theorie, die über ihre Modelle $\mathcal{M}$ sagt: $\mathcal{M}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper, der K_0 enthält. Wenden Sie mit Hilfe von Teil (a) Vaughts Test auf diese Theorie an.
$T := \mathrm{Diag}(K) \cup \mathrm{ACF}_p$, für $p = \mathrm{char}\, K$.

Sowohl K_0 als auch K sind Modelle von T. Wir zeigen, dass T vollständig ist; dann folgt: $K_0 \equiv_{L_{\text{ring}}(K_0)} K$.
Sei $\kappa > |K_0|$. Nach (a) sind alle Modelle von T der Kardinalität κ isomorph. Nach Vaughts Test ist T also vollständig.

(c) Seien $K_0 \subseteq K$ Körper, wobei K_0 algebraisch abgeschlossen ist. Sind $f_1, \ldots, f_m \in K_0[x_1, \ldots, x_n]$ Polynome in n Variablen mit Koeffizienten in K_0, und hat das Gleichungssystem

$$f_1(\underline{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\underline{x}) = 0$$

eine Lösung in K, so hat es bereits eine Lösung in K_0.
Hinweis: Wenden Sie (b) auf den algebraischen Abschluss von K an.
Die $L_{\text{ring}}(K_0)$-Aussage
$\exists \underline{x} : f_1(\underline{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\underline{x}) = 0$
ist in K^{alg} wahr, also auch in der elementaren Unterstruktur K_0.

(d) **Hilberts Nullstellensatz:** Sei K_0 ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien $f_1, \ldots, f_m \in K_0[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass das von $f_1, \ldots, f_m$ erzeugte Ideal in $K_0[x_1, \ldots, x_n]$ nicht gleich dem ganzen Ring $K_0[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Dann besitzt das Gleichungssystem

$$f_1(\underline{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\underline{x}) = 0$$

eine Lösung in K_0.
Hinweis: Wählen Sie ein maximales Ideal I in $R := K_0[y_1, \ldots, y_n]$, das $f_1(\underline{y}), \ldots, f_m(\underline{y})$ enthält, setzen Sie $K := R/I$, und fassen Sie dann $f_1, \ldots, f_n$ als Polynome in $K[\underline{x}]$ auf. Welches Element von K erhält man, wenn man das Tupel $(y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ in eins der Polynome f_i einsetzt? (Benutzen Sie dann (c)…)
Da das Ideal $(f_1(\underline{y}), \ldots, f_m(\underline{y}))$ nicht ganz R ist, ist, existiert ein maximales Ideal $I \triangleleft R$, das dieses Ideal enthält; insbesondere ist $f_i \in I$ für alle i.
Da $f(\underline{y}) \in I$ ist, gilt im Quotienten $K = R/I$: $f(\underline{y}) = 0$. Also ist $\underline{y} \in K^n$ eine Lösung in K des Gleichungssystems $\bigwedge_i f_i(\underline{x}) = 0$.
Nach (c) existiert bereits eine Lösung im Unterkörper $K_0 \subseteq K$.