Einführung in die Modelltheorie – Blatt 7

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir Tarskis Kettenlemma beweisen. Es besagt das folgende:

Sei $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine elementare Kette von L-Strukturen, d. h. für alle $i, j \in I$ gelte $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$. Dann ist $\mathcal{M} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}_j$ für jedes $j \in I$.

Wir nennen eine L-Formel $\phi(\underline{x})$ „gut" wenn gilt: Für jedes $j \in I$ und jedes Tupel $\underline{a} \in M_j^n$ gilt: $\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$.

(a) Begründen Sie: Alle atomaren L-Formeln sind gut.
Das folgt daraus, dass $\mathcal{M}_j$ eine Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Sind $\phi(\underline{x})$ und $\phi'(\underline{x})$ gut, so sind auch $\phi(\underline{x}) \wedge \phi'(\underline{x})$ und $\neg\phi(\underline{x})$ gut.
Sei $j \in I$ und $\underline{a} \in M_j^n$. Dann:
$\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a}) \wedge \phi'(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a})$ und $\mathcal{M}_j \models \phi'(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ und $\mathcal{M} \models \phi'(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \wedge \phi(\underline{a})'$
Und:
$\mathcal{M}_j \models \neg\phi(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M}_j \not\models \phi(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M} \not\models \phi(\underline{a}) \iff$
$\mathcal{M} \models \neg\phi(\underline{a}) \iff$

(c) Zeigen Sie: Ist $\psi(\underline{x}, y)$ gut, so ist auch $\phi(\underline{x}) := \exists y\colon \psi(\underline{x}, y)$ gut.
Hinweis für die Richtung „$\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a}) \Leftarrow \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$": Wenn ein $b \in M$ existiert mit $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$, dann liegt dieses b bereits in einem M_i. Verwenden Sie dann, dass die $\mathcal{M}_i$ eine elementare Kette bilden.
Sei $j \in I$ und $\underline{a} \in M_j^n$ gegeben.
Wir wollen zeigen: $\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a})$ gdw. $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$.
Beweis von $\Rightarrow$:
$\mathcal{M}_j \models \exists y\colon \psi(\underline{a}, y) \iff$
ex. $b \in M_j$ mit: $\mathcal{M}_j \models \psi(\underline{a}, b)$
Da ψ gut ist, ist das äquivalent zu:
ex. $b \in M_j$ mit: $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$

Da $M_j \subseteq M$, habe insbesondere: ex. $b \in M$ mit $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$
Das ist äquivalent zu: $\mathcal{M} \models \exists y\colon \psi(\underline{a}, y)$.
Beweis von $\Leftarrow$:
Aus $\mathcal{M} \models \exists y\colon \psi(\underline{a}, y)$ folgt: ex. $b \in M$ mit $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$
Da M die Vereinigung der M_i ist, ist $b \in M_i$ für ein $i \in I$. O.E. ist $M_i \succ M_j$.
Da ψ gut ist, ist $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$ äquivalent zu $\mathcal{M}_i \models \psi(\underline{a}, b)$.
Also $\mathcal{M}_i \models \exists y\colon \psi(\underline{a}, y)$
Aus $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$ folgt: $\mathcal{M}_j \models \exists y\colon \psi(\underline{a}, y)$

(d) Folgern Sie Tarsikis Kettenlemma.
Per Induktion über den Aufbau von ϕ haben wir gezeigt: Alle $L(M_j)$-Aussagen sind gut; also: $\mathcal{M}_j \equiv_{L(M_j)} \mathcal{M}$.
Nach Vorlesung ist das äquivalent zu: $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir bezeichnen mit DLO die L_{ord}-Theorie der „dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte", d. h. DLO besteht aus den folgenden Axiomen:

(a) $\forall x\colon \neg x < x$

(b) $\forall x, y\colon x < y \vee x = y \vee y < x$

(c) $\forall x, y, z\colon x < y \wedge y < z \to x < z$

(d) $\forall x, y\colon x < y \to \exists z\colon (x < z \wedge z < y)$

(e) $\forall x\colon (\exists y\colon y < x) \wedge (\exists y\colon x < y)$

(a)–(c) besagen also, dass $<$ eine Ordnungsrelation ist; (d) besagt, dass zwischen je zwei Elementen noch ein weiteres Element gefunden werden kann, und (e) besagt, dass kein kleinstes und kein größtest Element existiert.

Beispiele für Modelle von DLO sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass DLO vollständig ist. (Insbesondere gilt also z. B. $\mathbb{Q} \equiv_{L_{\text{ord}}} \mathbb{R}$.)

Wir nehmen also jetzt an, dass DLO nicht vollständig ist. Zeigen Sie unter dieser Annahme:

(a) Es existieren zwei Modelle $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models$ DLO, die beide abzählbar sind aber nicht isomorph.
Hinweis: Zeigen Sie, dass eine L_{ord}-Aussage ϕ existiert mit $\mathcal{M} \models \phi$ und $\mathcal{M}' \models \neg\phi$... wobei der Satz von Löwenheim-Skolem nützlich ist, um $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ abzählbar wählen zu können.
Da DLO nicht vollständig, existiert ein ϕ, so dass sowohl DLO $\cup\phi$ als auch DLO $\cup\neg\phi$ konsistent sind. Seien $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ jeweils Modelle davon. Nach Löwenheim-Skolem existieren abzählbare elementare Unterstrukturen $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ und $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$. Da $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \neq \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ (nach Konstruktion), können sie nicht isomorph sein.

(b) Sind $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ endliche Teilmengen, ist $f\colon A \to A'$ eine ordnungserhaltende Bijektion, und ist $b \in M$, so existiert ein $b' \in M'$ so dass f zu einer ordnungserhaltenden Bijektion $A \cup \{b\} \to A' \cup \{b'\}$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Schreiben Sie A als $\{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 < \dots < a_n$ und A' analog. Machen sie eine Fallunterscheidung danach, wo b zwischen den a_i angeordnet ist. Dass $\mathcal{M}'$ ein Modell von DLO ist, sollte Ihnen helfen zu zeigen, dass ein geeignetes $b' \in M'$ gefunden werden kann.
Seien a_i wie im Hinweis und analog $A' = \{a'_1, \dots a'_n\}$ mit $a'_1 < \dots < a'_n$. Da f ordnungserhaltend ist, ist $f(a_i) = a'_i$.
Sei nun $b \in M$ gegeben. Wir wollen ein $b' \in M'$ wählen und dann $f(b) = b'$ setzen.
– Falls $b = a_i$ für ein i ist, setze $b' := a'_i$.
– Falls $b < a_1$: Nach DLO (e) existiert in M' ein $b' < a_1$.
– Falls $b > a_n$: Nach DLO (e) existiert in M' ein $b' > a_n$.
– Falls $a_i < b < a_{i+1}$: Nach DLO (d) existiert in M' ein b' mit $a'_i < b' < a'_{i+1}$.

(c) Zeigen Sie, dass eine ordnungserhaltende Bijektion von M nach M' existiert und folgern Sie, dass DLO vollständig sein muss.
Hinweis: Dass $\mathcal{M}$ abzählbar ist, bedeutet, dass sich die Elemente von M durchnummerieren lassen, d. h. $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$; und analog $M' = \{a'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Definieren Sie induktiv endliche Mengen $A_i \subseteq M$, $A'_i \subseteq M'$ und ordnungserhaltende Abbildungen $f_i\colon A_i \to A'_i$ mit folgenden Eigenschaften:
  (a) $A_{i+1} \supseteq A_i$ und $A'_{i+1} \supseteq A'_i$
  (b) f_{i+1} ist eine Fortsetzung von f_i
  (c) $a_i \in A_{i+1}$ und $a'_i \in A'_{i+1}$.
(Sie müssen bei der Definition von f_{i+1} also erstmal ein Bild für a_i finden und danach noch ein Urbild für a'_i.)
Setzen Sie dann die f_i zu einer Abbildung $M \to M'$ zusammen.
Zunächst mal: Eine ordnungserhaltende Bijektion $M \to M'$ ist ein L_{ord}-Iso, d.h. wir erhalten damit einen Widerspruch zu (a).
Wir setzen $A_0 = A'_0 = \emptyset$ und $f_0\colon A_0 \to A'_0$ die „leere Abbildung".
Jetzt nehmen wir an, dass A_i, A'_i und f_i bereits konstruiert sind und wollen $A_{i+1}, A'_{i+1}, f_{i+1}$ konstruieren.
Wir wenden (b) auf $f_i\colon A_i \to A'_i$ an und auf das Element $a_i \in M$. Wir erhalten so eine ord-erhaltende Abbildung $g\colon B \to B'$ wobei $A_i \subseteq B$, $A'_i \subseteq B'$ und $a_i \in B$. Dann wenden wir (b) nochmal andersrum (also mit M und M' vertauscht) auf $g^{-1}\colon B' \to B$ an und auf das Element $a'_i \in M$. Sei $f_{i+1}\colon A_{i+1} \to A'_{i+1}$ das Inverse der davon erhaltenen Abbildung. Wir haben $A_{i+1} \sup B \sup A_i$, $A'_{i+1} \sup B' \sup A'_i$ und $a_i \in B \subseteq A_{i+1}$ und $a_{i+1} \in A'_{i+1}$.
Damit haben wir also die A_i, A'_i, f_i wie im Hinweis gefunden.
Jetzt definieren wir $f\colon M \to M'$ durch $f(a_i) = f_{i+1}(a_i)$.
Dieses f ist ordnungserhaltend, da alle f_i ordnungserhaltend sind und sich gegenseitig fortsetzen: Ist $a_i < a_j$, so wähle $k > \max\{i, j\}$. Dann ist $f(a_i) = f_k(a_i) < f_k(a_j) = f(a_j)$.
Daraus, dass f ordnungserhaltend ist, folgt auch, dass f injektiv ist. Surjektivität von f: a'_i liegt im Bild von f_{i+1}, d.h. es existiert ein $b \in M$ mit $f_{i+1}(b) = a'_i$. Daraus folgt: $f(b) = a'_i$.