Einführung in die Modelltheorie – Blatt 5

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $\mathcal{M}_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ für $i \in \mathbb{N}$, aufgefasst als L_{agrp}-Struktur, sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, und sei $\mathcal{M} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$. Zeigen Sie (unter Verwendung des Satzes von Łoś): Eine der folgenden Behauptungen gilt immer, eine der folgenden Behauptungen gilt nie, und bei einer gibt es freie Ultrafilter, so dass sie gilt und andere freie Ultrafilter, so dass sie nicht gilt.

(a) Es existiert ein Element $a \in M$ der Ordnung 2.
Hinweis: Es ist nützlich, sich daran zu erinnern, dass in *endlichen* Gruppen G gilt: Die Ordnung jedes Gruppenelements ist ein Teiler von $\#G$.
Hängt von $\mathbb{U}$ ab:
Betrachte die Aussage $\phi = \exists x\colon x \neq 0 \wedge x + x = 0$. Die Frage ist, ob $\mathcal{M} \models \phi$ gilt.
Falls i gerade ist, gilt $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \models \phi$, da $x = i/2$ gewählt werden kann. Falls i ungerade ist, gilt $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \not\models \phi$: Da die Ordnung eines Elements die Gruppenordnung teilt, kann $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ keine Elemente der Ordnung 2 enthalten.
Wir erhalten also: $J := \{i \mid \mathcal{M}_i \models \phi\}$ ist genau die Menge der geraden Zahlen. Nach Łoś habe: M enthält Elemente der Ordnung 2 gdw $J \in \mathcal{U}$.
Beweis der Existenz eines Ultrafilters, der J enthält: Wende Satz 2.1.4 an auf $\mathcal{A} = \{J\} \cup \{J' \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus J' \text{ endlich}\}$.
Beweis der Existenz eines Ultrafilters, der J nicht enthält: Wende Satz 2.1.4 an auf $\mathcal{A} = \{\mathbb{N} \setminus J\} \cup \{J' \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus J' \text{ endlich}\}$.

(b) M besitzt eine Untergruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.
Zur Erinnerung: Das ist äquivalent dazu, dass in M ein Element b der Ordnung ∞ existiert, d. h. mit $nb \neq 0$ für alle $n \geq 1$.
Gilt immer:
Setze $b_i := 1$ für alle i und $b := b_{\mathcal{U}}$.
Beh: $nb \neq 0$ für alle n. Sei n fest und betrachte die Fml $\phi(x) = x + \cdots + x = 0$ (n mal).
$\mathcal{M}_i \models \phi(b_i)$ kann nur gelten, wenn $i \leq n$ ist. Also nur für endlich viele i. Also ist $\{i \mid \mathcal{M}_i \models \phi(b_i)\} \notin \mathcal{U}$. Nach Łoś habe also $\mathcal{M} \not\models \phi(b_{\mathcal{U}})$, d.,. $nb \neq 0$.
(Die zu $\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppe von $\mathcal{M}$ ist dann $\langle b\rangle$; der Isomorphismus ist $n \mapsto nb$.)

(c) Es existiert ein $n \geq 1$ so dass die Abbildung $\alpha\colon M \to M, a \mapsto na$ injektiv aber nicht surjektiv ist.
Gilt nie:
Sei n fest und betrachte eine Aussage, die besagt, dass Mult. mit n injektiv aber nicht surjektiv ist. Also z.B.: $\phi = \forall x_1, x_2\colon (nx_1 = nx_2 \to x_1 = x_2) \wedge \exists x\colon \neg\exists y\colon ny = x$.
Diese Aussage gilt in keinem $\mathcal{M}_i$ (da die endlich sind), also auch nicht in $\mathcal{M}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir wählen einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $I := \mathbb{N}$ und setzen $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}^I/\mathcal{U}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Łoś:

(a) Für $a, b \in \mathbb{N}^*$ gilt $a \leq^* b$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{N}^*$ existiert mit $a +^* c = b$, und wenn ein solches c existiert, ist es eindeutig. (Hierbei sind mit $<^*$ und $+^*$ die Interpretationen in $\mathbb{N}^*$ von $<$ und $+$ gemeint.)
Betrachte die Aussage $\forall a, b\colon a \leq b \leftrightarrow \exists c\colon a + c = b$. Die gilt in $\mathbb{N}$, also auch in $\mathbb{N}^*$. Und analog: $\forall a, b, c, c'\colon (a + c = b \wedge a + c' = b) \to c = c*$

(b) Die Abbildung $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, a \mapsto a +^* 1$ ist injektiv, und ihr Bild ist alles außer 0.
In $\mathbb{N}$ gilt: $\forall x, x'\colon (x + 1 = x' + 1 \to x = x')$. Also gilt das auch in $\mathbb{N}^*$. Und in $\mathbb{N}$ gilt: $\forall x\colon x \neq 0 \leftrightarrow \exists y\colon y + 1 = x$. Also gilt auch das in $\mathbb{N}^*$.

(c) Für jedes $a \in \mathbb{N}^*$ gilt: Entweder es existiert ein $b \in \mathbb{N}^*$, so dass entweder $b + b = a$ oder $b + b + 1 = a$ gilt.
Die Aussage $\forall x\colon \exists y\colon y + y = x \vee y + y = x + 1$ gilt in $\mathbb{N}$, also auch in $\mathbb{N}^*$.

(d) In $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ besitzt jedes Element einen Vorgänger, d. h. zu jedem $a \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ existiert ein $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ mit $b +^* 1 = a$.
Hinweis: Eine vorige Teilaufgabe ist nützlich.
Nach (b) ist ganz $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ im Bild der 1-addieren-Abbildung, also existiert ain $b \in \mathbb{N}^*$ mit $b +^* 1 = a$. Habe außerdem $b \notin \mathbb{N}$, da sonst $b +^* 1 = a$ wäre.

(e) Sei $a \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ existiert mit $b +^* n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Man würde vielleicht gerne $b \approx \frac{a}{2}$ wählen...
Nach (c) existiert ein $b \in \mathbb{N}^*$ mit $b +^* b = a$ oder $b +^* b +^* 1 = a$.
Habe $b \notin \mathbb{N}$, da sonst auch $b +^* b \in \mathbb{N}$ wäre, und auch $b +^* b +^* 1$.
Außerdem: Habe $b +^* c = a$ für ein $c \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Dieses c ist eindeutig nach (a). Es kann also kein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $b +^* n = a$.