Einführung in die Modelltheorie – Blatt 4

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte):

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer unendlichen Indexmenge I.

(a) Zeigen Sie: Sind $J_1, \dots, J_m \subseteq I$ disunkte Mengen mit $J_1 \cup \dots \cup J_k \in \mathcal{U}$, so ist genau eine der Mengen J_k in $\mathcal{U}$.
Maximal eine: Falls $J_k \in \mathcal{U}$, sind alle anderen $J_{k'}$ nicht in $\mathcal{U}$, da sonst auch $J_k \cap J_{k'} = \emptyset$ in $\mathcal{U}$ wäre.
Mind. eine: Wenn keine drin wäre, dann wären all die Komplemente $J'_k := I \setminus J_k$ drin. Der Schnitt $J'_1 \cap \dots J'_k$ müsste dann auch drin sein; das ist aber das Komplement von $J_1 \cup \dots \cup J_k$, was in $\mathcal{U}$ ist; also Widerspruch.

(b) Zeigen Sie: $\mathcal{U}$ ist ein Hauptultrafilter genau dann, wenn $\mathcal{U}$ (mindestens) eine endliche Menge enthält.
Wenn Hauptultrafilter, dann enthält $\mathcal{U}$ per Definition eine Menge der Form $\{i_0\}$. Enthält umgekehrt $\mathcal{U}$ eine endliche Menge $\{i_1, \dots, i_m\}$, dann enthält er nach (a) auch eine der Mengen $\{i_k\}$.

(c) Sei $I' \subseteq I$. Wir wollen „$\mathcal{U}$ auf I' einschränken“. Wir definieren dazu einfach $\mathcal{U}' := \{J \subseteq I' \mid J \in \mathcal{U}\}$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}'$ entweder ein Ultrafilter auf I' ist oder leer ist. Unter welcher Bedingung an I' ist $\mathcal{U}'$ ein Ultrafilter auf I'?
Falls $I' \notin \mathcal{U}$ ist, enthält $\mathcal{U}$ auch keine Teilmenge von I', also ist $\mathcal{U}'$ leer.
Falls $I' \in \mathcal{U}$ ist, ist $\mathcal{U}'$ ein Ultrafilter auf I': Abgeschlossenheit unter Schnitt und Obermengen ist klar. Bleibt z.z: Ist $J \subseteq I'$, so ist genau eine der Mengen J und $I' \setminus J$ in $\mathcal{U}'$... also in $\mathcal{U}$. Das folgt aus (a).

Aufgabe 2 (1+1+3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir den Ultralimes präzise machen. Um uns das Leben etwas leichter zu machen (und $\pm\infty$ als Limes zu ersparen) betrachten wir nur Folgen von Zahlen, die im Intervall $[0, 1]$ liegen.

Sei also $a_i \in [0, 1]$ für $i \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$; „groß“ und „klein“ beziehen sich auf $\mathcal{U}$.

Zu jeder Zahl $c \in [0, 1]$ definieren wir $J_c := \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \geq c\}$. Wir definieren den Ultralimes $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ als das Supremum der Menge $\{c \in [0, 1] \mid J_c \in \mathcal{U}\}$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $c < \lim_{\mathcal{U}} a_i$, so ist J_c groß.
Damit der Ulim das Supremum sein kann, muss ein c' existieren mit $c \leq c' \leq \lim_{\mathcal{U}} a_i$ und $J_{c'}$ groß. Aus $c \leq c'$ folgt $J_{c'} \subseteq J_c$, also ist auch J_c groß.

(b) Ist $c > \lim_{\mathcal{U}} a_i$, so ist $I \setminus J_c$ groß.
Nach Def. vom Supremum muss J_c klein sein. Also ist das Komplement groß.

(c) $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ ist die einzige Zahl $b \in [0, 1]$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$ groß.
Hinweis: Dass $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ diese Eigenschaft hat, kann man mit Hilfe von (a) und (b) zeigen. Dass andere Zahlen b nicht die Eigenschaft haben, kann man z. B. zeigen, indem man für ein geeignet gewähltes ϵ eine große Menge findet, die Disjunkt zu $\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$ ist.
Ultralimes hat die Eigenschaft:
$J := \{i \mid a_i \geq b - \epsilon/2\}$ ist groß nach (a).
Damit ist auch die größere Menge $J' := \{i \mid a_i > b - \epsilon\}$ groß.
Außerdem: $J'' := \{i \mid a_i < b + \epsilon\}$ ist groß nach (b).
Dann ist auch $J' \cap J''$ groß; das ist genau die gesuchte Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$.
Andere Zahlen b haben nicht die Eigenschaft:
Wähle $\epsilon := (b - \lim_{\mathcal{U}} a_i)/2$. Dann sind $J' := \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$ und $J'' := \{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - \lim_{\mathcal{U}} a_i| < \epsilon\}$ disjunkt. J'' ist groß (wie wir gerade gesehen haben), also kann J' nicht auch groß sein.

Anmerkung: Die Definition des Ultralimes funktioniert sehr viel allgemeiner: Statt $\mathbb{N}$ kann man eine beliebige Indexmenge wählen, und statt $[0, 1]$ einen beliebigen kompakten topologischen Raum X. Man erhält immer noch, dass jede Folge $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in X$ einen wohldefinierten Ultralimes $\lim_{\mathcal{U}} a_i \in X$ hat, der dadurch charakteristiert ist, dass für jede offene Umgebung U von $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ gilt: $\{i \in I \mid a_i \in U\}$ ist groß.