Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 1.5.6: Ist T eine Theorie mit der Eigenschaft, dass jede endliche Teilmenge von T konsistent ist, so ist auch T konsistent.
Begründung es Hinweises: Eine Herleitung von ϕ ist (per Definition) endlich lang, also benutzt die Herleitung insbes. nur endliche viele Aussagen aus T. Sei T_0 die Menge dieser Aussagen. Dann kann man ϕ mit der gleichen Herleitung auch aus T_0 herleiten.
Ann. T besitzt kein Modell. Dann $T \models \bot$. Nach 1.5.6 folgt $T \mathrel{|\!\sim} \bot$. Nach Hinweis existiert ein endliches T_0 mit $T_0 \mathrel{|\!\sim} \bot$. Nach 1.5.6 folgt $T_0 \models \bot$. Also hat T_0 kein Modell.

(b) Wir hatten gesehen, dass es eine L_{ring}-Theorie T gibt, deren Modelle genau die Körper der Charakteristik 0 sind, nämlich

$$T = \{\text{Körperaxiome}\} \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \neq 0 \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}.$$

Zeigen Sie nun, dass es *keine* L_{ring}-Theorie T' gibt, deren Modelle genau die Körper der Charakteristik $\neq 0$ sind.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $T \cup T'$ ein Modell besitzt und wenden Sie (a) an.
Ann. T' existiert.
Sei $T_0 \subseteq T \cup T'$ eine beliebige endliche Teilmenge.
Behauptung: T_0 ist konsistent.
Beweis der Behauptung: In T_0 kommen insbes. nur endlich viele der Aussagen $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \neq 0$ in T_0 vor. Sei p eine Primzahl, für die $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ mal}} \neq 0$ nicht in T_0 steht. Dann ist $\mathbb{F}_p \models T_0$. (Da: $\mathbb{F}_p$ ist Körper der Charakteristik $\neq 0$, also Modell von T'. Und außerdem Modell von $T \cap T_0$, nach Wahl von p.) Also ist T_0 konsistent.
Wir haben also gezeigt: Jede endliche Teilmenge von $T \cup T'$ ist konsistent. Aus (a) folgt: $T \cup T'$ ist konsistent. Das kann aber nicht sein, da T nur Körper der Charakteristik 0 erlaubt und T' nur Körper der Charakteristik $\neq 0$.

Aufgabe 2 (1+1+3 Punkte):

(a) Sei L eine Sprache und $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel (für $\underline{x} = (x_1, \ldots x_n)$). Geben Sie eine L-Aussage ψ an, so dass für jede L-Theorie T gilt:
$T \models \psi$ genau dann, wenn $\phi(\underline{x})$ in jedem Modell M von T eine Funktion definiert
Hierbei ist „Funktion definieren“ genau im Sinne von Definition 1.2.6 (b) gemeint. (Insbesondere soll der Definitionsbereich der Funktion wie in 1.2.6 (b) sein.)
Dass eine Formel eine Funktion definiert, bedeutet, dass sie den Graph der Funktion definiert. In diesem Fall ist der Graph eine Teilmenge von M^n, d.h. die Funktion muss eine Funktion von M^{n-1} nach M sein. Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ ist der Graph einer solchen Funktion genau dann, wenn für jedes $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in M^2$ genau ein $x_n \in M$ existiert mit $\underline{x} \in X$. Die Aussage ψ ist also: $\forall x_1, \ldots, x_{n-1} \colon \exists^{=1} x_n \colon \phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

(b) Geben Sie eine L_{Me}-Formel $\phi(x, y)$ an, die besagt: $y = \{x\}$.
$\forall w \colon w \in y \leftrightarrow w = x$

(c) Zeigen Sie, dass die Formel ϕ aus (b) in jedem Modell von ZFC eine Funktion definiert. Geben Sie dabei (vor allem) an, welche ZFC-Axiome Sie wie verwenden.
Hinweis: Um zu zeigen, dass (zu gegebenem x) y existiert, sollten Sie (mit Hilfe eines geeigneten Axioms) zuächst mal irgend eine Menge finden, die x als Element enthält. Danach können Sie diese Menge (mit Hilfe eines anderen Axioms) geeignet verkleinern.
Wir müssen zeigen, dass in jedem Modell M von ZFC und für jedes $x \in M$ genau ein y existiert, das die Formel ϕ aus (b) erfüllt.
Existenz von y: Zunächst haben wir nach dem Potenzmengenaxiom eine Menge z mit: $w \in z \iff w \subseteq x$. Da $x \subseteq x$ habe insbesondere $x \in z$.
Jetzt wenden wir auf diese Menge z Aussonderung an: $y = \{w \in z \mid w = x\}$. Da $w \in z$ erhalte $x \in y$...
Die Eindeutigkeit von y folgt aus Extensionalität: Wenn $\phi(x, y)$ und $\phi(x, y')$ gilt, dann habe für alle w: $w \mathrel{\dot\in} y \iff (w = x) \iff w \mathrel{\dot\in} y'$. Nach Extensionalität gilt damit $y = y'$.