Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte):

Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie. Zeigen Sie:

(a) Für L-Aussagen ϕ und ψ gilt: $T \models \phi \wedge \psi$ genau dann, wenn $T \models \phi$ und $T \models \psi$.
$T \models \phi \wedge \psi$ gdw.
In allen Modellen $\mathcal{M}$ von T gilt $\phi \wedge \psi$ gdw.
In allen Modellen $\mathcal{M}$ von T gilt sowohl ϕ als auch ψ gdw.
$T \models \phi$ und $T \models \psi$

(b) Ist c ein neues Konstantensymbol, und gilt $T \models \phi(c)$ (in der Sprache $(L \cup \{c\})$), so gilt $T \models \forall x\colon \phi(x)$.
Zu zeigen: Ist $\mathcal{M}$ ein Modell von T, so gilt $\mathcal{M} \models \forall x\colon \phi(x)$.
Anders ausgedrückt: Für alle $a \in M$ ist zu zeigen: $\mathcal{M} \models \phi(a)$.
Wir machen $\mathcal{M}$ zu einer $(L \cup \{c\})$-Struktur, indem wir c als a interpretieren. Wegen $T \models \phi(c)$ habe $\mathcal{M} \models \phi(a)$.

(c) Wir nehmen wie bei (b) an, dass c ein neues Konstantensymbol ist und dass $T \models \phi(c)$ gilt. Warum folgt *nicht* $T \models \exists x\colon \phi(x)$? (Geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.)
Vorbemerkung: Die Aufgabe war nicht präzise gestellt: Ob „$T \models \exists x\colon \phi(x)$“ gilt, hängt davon ab, in welcher Sprache man arbeitet: Gemeint war: In der Sprache L; wenn man dies in der Sprache $L \cup \{c\}$ betrachtet, gibt es überhaupt keine leere L-Struktur (da c durch ein Element der Struktur interpretiert werden muss); insbesondere gilt dann also $T \models \exists x\colon \phi(x)$ selbst dann, wenn T die leere Theorie ist. (In diesem Fall ist also die Behauptung der Aufgabe falsch.)
Lösung der Aufgabe so wie sie gemeint war: Seien L und T leer und sei $\phi(x) = \neg\bot$. Dann ist (in der Sprache $L \cup \{c\}$) $\phi(c)$ in jeder $(L \cup \{c\})$-Struktur wahr, insbesondere gilt $T \models \phi(c)$. (Anmerkung: An dieser Stelle kann man bei „$\models$“ nur die Sprache $L \cup \{c\}$ gemeint sein, da c in der Aussage $\phi(c)$ vorkommt.) Andererseits gilt nicht $T \models \exists x\colon \phi(x)$, wie man sieht, wenn man die leere Struktur als Modell von T nimmt.

Hinweis: Bei der gesamten Aufgabe geht es vor allem darum, die Definition von $\models$ anzuwenden, also entsprechende Modelle von T zu betrachten.

Aufgabe 2 (4+1 Punkte):

Sei L eine endliche Sprache (d. h. mit endlich vielen Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen) und sei $\mathcal{M}$ eine endliche L-Struktur (d. h. mit endlicher Grundmenge M).

(a) Zeigen Sie, dass eine L-Aussage ϕ existiert, die $\mathcal{M}$ bis auf L-Isomorphie charakterisiert, d. h. für L-Strukturen $\mathcal{N}$ gilt: $\mathcal{N} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ isomorph sind.
(Vor allem sollen Sie beschreiben, wie man eine solche Aussage ϕ erhält. Die Begründung, dass ϕ das tut, was es soll, kann etwas informell sein.)
Wir konstruieren ϕ wie folgt: Sei $n = \#M$ und seien $a_1, \dots, a_n$ die Elemente von M.
Wir setzen $\phi := \forall x_1, \dots, x_n\colon \psi(\underline{x})$, wobei $\psi(\underline{x})$ die Konjunktion der folgenden Formeln ist; hierbei fassen wir Konstanten als 0-stellige Funktionen auf:
  (a) $x_i \neq x_j$ für alle Paare $i \neq j$.
  (b) $\forall y\colon (y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n)$
  (c) Für jede Formel $\chi(\underline{x})$ der Form $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell})$ oder $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}) = x_{i_0}$: Wenn $\mathcal{M} \models \chi(\underline{a})$ gilt, nehmen wir $\chi(\underline{x})$ zu $\psi(\underline{x})$ hinzu; sonst nehmen wir $\neg\chi(\underline{x})$ zu $\psi(\underline{x})$ hinzu.

Wir haben ψ so gebaut, dass $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a})$ gilt, und damit auch $\mathcal{M} \models \phi$.
Ist $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$, so gilt auch $\mathcal{N} \models \phi$ nach Bemerkung 1.3.4. Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\mathcal{N} \models \phi$ gilt. Dann existieren $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{N}$, so dass $\mathcal{N} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$. Aus (a) folgt, dass die b_i paarweise verschieden sind, und aus (b) folgt, dass $N = \{b_1, \dots, b_n\}$. Wir erhalten also eine Bijektion $\alpha\colon M \to N$ mit $\alpha(a_i) = b_i$. Die Bedingungen aus (c) sorgen dafür, dass α ein L-Iso ist:

- Für jedes Funktionssymbol f: Ist $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}) = a_{i_0}$, so ist die Formel $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}) = x_{i_0}$ Teil von ψ, d. h. aus $\mathcal{N} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$ folgt, dass in $\mathcal{N}$ gilt: $f(b_{i_1}, \dots, b_{i_\ell}) = b_{i_0}$.
- Für jedes Relationssymbol R: Gilt $R(a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell})$, so ist $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell})$ Teil von ψ, d. h. aus $\mathcal{N} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$ folt $\mathcal{N} \models R(b_{i_1}, \dots, b_{i_\ell})$.

(b) Folgern Sie: Zwei endliche L-Strukturen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ sind elementar äquivalent genau dann, wenn sie isomorph zueinander sind.
Die Richtung $\Leftarrow$ ist trivial.
Für $\Rightarrow$: Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ elementar äquivalent, und sei ϕ die Aussage aus (a), die $\mathcal{M}_1$ bis auf Isomorphie charakterisiert. Da $\mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{M}_1$ gilt ϕ auch in $\mathcal{M}_2$. Also ist $\mathcal{M}_2$ nach (a) isomorph zu $\mathcal{M}_1$.