Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Modelltheorie – Blatt 11

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei K ein unendlicher Körper, sei $L_{K\text{-VR}}$ die Sprache der K-Vektorräume und sei T die Theorie der nicht-trivialen K-Vektorräume.

(a) Begründen Sie, dass jede atomare $L_{K\text{-VR}}$-Formel $\phi(\underline{x})$ moduloT äquivalent zu einer Formel der Form $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ ist, für gewisse $r_i \in K$.
Behauptung: Jeder Term ist äquivalent zu einem Term der Form $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$.
Beweis der Behauptung: Wenn man Funktionssymbole aus $L_{K\text{-VR}}$ auf solche Terme anwendet (Summe, negatives, mit $r \in K$ multiplizieren), erhält man wieder einen solchen Term.
Eine atomare Formel hat die Form $t_1 = t_2$. Das ist äquivalent zu $t_1 - t_2 = 0$, was die gewünschte Form hat.

(b) Zeigen Sie: T hat Quantoren-Elimination.
Sei $\psi(\underline{x}) = \exists x_0\colon \wedge_i \phi_i(x_0, \underline{x})$, für Literale ϕ_i. OE sind die Literale entweder $\sum_{i=0}^{n} r_i x_i = 0$ oder $\sum_{i=0}^{n} r_i x_i \neq 0$ (nach (a)).
O.E. kommt x_0 in jedem Literal mit Faktor $r_0 \neq 0$ vor. (Sonst kann das Literal aus dem Quantor rausgezogen werden.)
O.E. ist sogar $r_0 = 1$. (Sonst multipliziere das Literal mit $1/r_0$.)
Wenn ein Literal der Form $x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ existiert: Ersetze in allen anderen Literalen das x_0 durch $-\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ und entferne den Quantor $\exists x_0$. (Auf diese Art erhalte eine äquivalente, quantorenfreie Formel.)
Sonst (d.h. wenn alle Literale Ungleichungen sind) ist $\psi(\underline{x})$ immer wahr (in jedem Modell von T), da jedes Literal nur ein x_0 ausschließt und da jedes Modell von T unendlich ist.

(c) Geben Sie mit Hilfe von Satz 4.1.7 einen neuen Beweis an, dass T vollständig ist.
Nach dem Satz müssen wir nur eine $L_{K\text{-VR}}$-Struktur $\mathcal{A}$ finden, die sich in jedes Modell von T einbetten lässt. Setze einfach $\mathcal{A} = \{0\}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $T = \mathrm{Th}_L(\mathbb{Z})$, für $L = \{s\}$, wobei s die Nachfolger-Abbildung ist, also $s(n) = n + 1$.

(a) Geben Sie eine quantorenfreie L-Formel an, die modulo T äquivalent ist zu

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \exists y\colon y \neq s(s(y)) \wedge s(y) = x_1 \wedge s(s(y)) = s(s(s(x_2))) \wedge y \neq s(x_3).$$

Sie brauchen Ihre Antwort nur ganz kurz zu begründen.
Das erste Literal ist sowieso immer wahr und kann also weggelassen werden: Das zweite Literal besagt $y = x_1 - 1$. Wenn wir das in die anderen beiden Literale einsetzen, erhalten wir $x_1 - 1 + 2 = x_2 + 3$, also $x_1 = x_2 + 2$ und $x_1 - 1 \neq x_3 + 1$, also $x_1 \neq x_3 + 2$. Insgesamt also: $x_1 = s(s(x_2)) \wedge x_1 \neq s(s(x_3))$. (Oder alternativ: $x_1 = s(s(x_2)) \wedge x_2 \neq x_3$.)

(b) Zeigen Sie: T hat Quantoren-Elimination.
Hinweis: Sie können sich das Leben erleichtern, indem Sie zunächst prüfen, dass atomare L-Formeln ohne Einschränkung die Form „$x = y + k$“ haben (für Variablen x, y und ein festes $k \in \mathbb{Z}$).
Bzgl. des Hinweises: $x = y + k$ lässt sich als atomare L-Fml ausdrücken: $x = s^k(y)$ falls $k \geq 0$ und $s^{-k}(x) = y$ falls $k < 0$. Umgekehrt hat eine atomare L-Fml die Form $s^k(x) = s^{k'}(y)$; das ist äquivalent zu: $x = y + (k' - k)$.
Wir betrachten nun eine Formel der Form $\psi(\underline{x}) = \exists x_0\colon \bigwedge_i \phi_i(x_0, \underline{x})$ für Literale ϕ_i, wobei x_0 in jedem der Literale vorkommt.
Jedes Literal ϕ_i hat die Form $x_0 \diamond x_\ell + k$, wobei $\diamond \in \{=, \neq\}$ ist, $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \ell \leq n$.
Ist $\ell = 0$, so ist ϕ_i entweder immer wahr oder immer falsch (nämlich: immer wahr genau dann, wenn ϕ_i von der Form $x_0 = x_0$ ist oder von der Form $x_0 \neq x_0 + k$ mit $k \neq 0$). Falls immer wahr, kann ϕ_i einfach weggelassen werden; falls immer falsch, ist die ganze Fml $\psi(\underline{x})$ äquivalent zu $\perp$.
Wir können jetzt also annehmen, dass auf der rechten Seite der Literale nur die Variablen $x_1, \ldots x_n$ vorkommen (und nicht x_0).
Falls nur Literale mit „$\neq$“ existieren: Dann schließt jedes Literal maximal einen Wert für x_0 aus. D.h. egal was $x_1, \ldots, x_n$ sind, bleiben noch unendlich viele x_0 übrig, die alle Literale erfüllen. Insbes. ist $\psi(\underline{x})$ immer wahr (also äquivalent zu $\neg\perp$).
Sei also jetzt o.E. ϕ_1 von der Form $x_0 = x_\ell + k$. Dann kann in allen anderen Literalen ϕ_i (mit $i \geq 2$) x_0 durch $x_\ell + k$ ersetzt werden. Danach kommt in all diesen ϕ_i die Variable x_0 nicht mehr vor, und sie können aus dem Quantor rausgezogen werden.
In der Formel bleibt also jetzt nur noch das erste Literal: $\exists x_0\colon x_0 = x_\ell + k$. Das ist immer wahr, also äquivalent zu $\top$.