Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir definieren die Summe und das Produkt von zwei Ordinalzahlen rekursiv wie folgt:

(i) $\alpha + 0 := \alpha$ und $\alpha \cdot 0 = 0$ für $\alpha \in \mathrm{On}$

(ii) $\alpha + s(\beta) := s(\alpha + \beta)$ und $\alpha \cdot s(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha$ für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$

(iii) $\alpha + \lambda := \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$ und $\alpha \cdot \lambda := \sup_{\beta<\lambda}(\alpha \cdot \beta)$ für $\alpha \in \mathrm{On}$ und Limes-Ordinalzahlen λ.

In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die plus und mal assoziativ und schwach monoton sind, d. h. aus $\alpha \le \alpha' \wedge \beta \le \beta'$ folgt $\alpha + \beta \le \alpha' + \beta'$ und $\alpha \cdot \beta \le \alpha' \cdot \beta'$. (Achtung: Weder plus noch mal sind kommutativ.)

Zeigen Sie:

(a) Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, die kein Maximum besitzt so ist $\sup M$ eine Limes-Ordinalzahl.
Anname $\sup M = s(\beta)$ für eine Ord-Zahl β. Dann müsste, damit $\sup M > \beta$ ist, auch $s(\beta)$ selbst in M sein. Dann wäre aber $s(\beta)$ das Maximum von M; also Widerspruch zur Annahme.

(b) Sei α eine Limes-Ordinalzahl und sei M die Menge aller Limes-Ordinalzahlen, die echt kleiner als α sind. Wenn M kein Maximum hat, dann ist $\sup M = \alpha$.
Offensichtlich ist $\sup M \le \alpha$ (da alle $\beta \in \sup M$ kleiner als α sind.)
Annahme $\beta := \sup M < \alpha$. Da $\sup M$ kein Maximum hat, ist nach (a) β eine Limesordinalzahl. Dann ist $\beta \in M$ nach Definition von M (da β Limesord-Zahl kleiner als α). Zusammen mit $\beta = \sup M$ folgt aber dann, dass β das Maximum von M ist; Widerspruch zu Annahme.

(c) Für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha + \omega$ ist die kleinste Limes-Ordinalzahl, die größer als α ist.
Per Def. ist $\alpha + \omega = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha + n)$.
Das ist $> \alpha$, da $\ge \alpha + 1 = s(\alpha)$.
Bew, dass $\alpha + \omega$ Limes-Ordzahl ist: Die Menge $M := \{\alpha + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat kein Maximum, da für jedes n gilt: $\alpha + s(n) = s(\alpha + n) > \alpha$. Also ist $\alpha + \omega := \sup M \notin M$. Wenn $\sup M = s(\beta)$ für ein β wäre, wäre dann aber $\gamma \le \beta$ für alle $\gamma \in \sup M$, also $\sup M \le \beta$.
Bew, dass es keine Limes-Ordinalzahl dazwischen gibt: Alle Ord-Zahlen zwischen α und $\alpha+\omega$ sind $s(\alpha), s(s(\alpha))$, etc; das sind alles Nachfolger-Ordzahlen.

(d) Eine Ordinalzahl α lässt sich in der Form $\omega \cdot \beta$ schreiben (für $\beta \in \mathrm{On}$) genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist oder α eine Limes-Ordinalzahl ist.
Hinweis: Es kann nützlich sein, eine Fallunterscheidung danach zu machen, ob die Menge der Limes-Ordinalzahlen kleiner als α ein Maximum hat.
Wir zeigen erstmal, dass jede Ord-Zahl der Form $\omega \cdot \beta$ entweder 0 oder Limes ist.
Fall $\beta = 0$: $\omega \cdot 0 = 0$.
Fall β Nachfolger, also $\beta = s(\beta')$. Dann ist $\omega \cdot \beta = \omega \cdot \beta' + \omega$, und das ist ein Limes nach (c).
Falls β Limes: Dann ist $\omega \cdot \beta = \sup_{\beta'<\beta}(\omega \cdot \beta')$. Nach (a) reicht also z.z, dass die Menge $M := \{\omega \cdot \beta' \mid \beta' < \beta\}$ kein Maximum hat. In der Tat kann $\omega \cdot \beta'$ kein Maximum sein, da auch $\omega \cdot s(\beta') \in M$ ist, und $\omega \cdot s(\beta') = \omega \cdot \beta' + \omega$ ist nach (c) größer als $\omega \cdot \beta'$.
—
Jetzt zeigen wir, dass jede Limes-Ord-Zahl sich in der Form $\omega \cdot \beta$ schreiben lässt. (Dass sich 0 so schreiben lässt, ist klar.) Annahme nicht; sei dann α die kleinste Limes-Ord-Zahl, die sich nicht also $\omega \cdot \beta$ schreiben lässt.
Sei M die Menge aller Limes-Ordzahlen, die echt kleiner als α sind.
Fall 1: M hat ein Maximum α'. Dann habe also $\alpha' = \omega \cdot \beta'$ für ein geeignetes β' (da α als kleinstes Gegenbsp angenommen war). Dann ist nach (c) $\omega \cdot \beta' + \omega$ die nächst-größere Limes-Ordzahl, also $= \alpha$. Also $\alpha = \omega \cdot \beta' + \omega = \omega \cdot s(\beta')$.
Fall 2: M hat kein Maximum. Dann ist $\alpha = \sup M$ nach (b). Da α als minimales Gegenbsp gewählt war, lässt sich M schreiben als $\{\omega \cdot \beta \mid \beta \in N\}$ für eine gewisse Menge $N \subseteq \mathrm{On}$. Wenn N ein Maximum β hätte, wäre $\omega \cdot \beta$ ein Maxium von M, also hat N kein Maximum. Also habe $\omega \cdot \sup N = \sup\{\omega \cdot \beta \mid \beta \in N\} = \sup M = \alpha$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass es unterschiedliche „Arten“ von Kardinalzahlen gibt.

(a) Für jede Ordinalzahl α ist offensichtlich $\aleph_\alpha$ viel größer als α selbst... oder?
Wir setzen $\kappa_0 := \aleph_0$, $\kappa_{n+1} := \aleph_{\kappa_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} \kappa_n$. Zeigen Sie, dass $\aleph_\lambda = \lambda$ ist.
Nach Bem. 3.2.8 ist $\aleph_\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta$. Da λ das Supremum der κ_n ist (so dass für jedes $\beta < \lambda$ ein n existiert mit $\kappa_n \ge \beta$, reicht es, das Supremum über die κ_n zu nehmen, also $\aleph_\lambda = \sup_n \aleph_{\kappa_n}$.
Wegen $\aleph_{\kappa_n} = \kappa_{n+1}$ erhalte also: $\aleph_\lambda = \sup_n \kappa_{n+1} = \lambda$

(b) „Manche Kardinalzahlen lassen sich schlecht von unten annähern“: Sei β eine Nachfolge-Ordinalzahl. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq \aleph_\beta$ nur dann $\aleph_\beta$ als Supremum haben kann, wenn $|M| = \aleph_\beta$ ist. (Insbesondere kann M nicht abzählbar sein.)
Sei also $\beta := s(\beta')$, und sei $M \subseteq \aleph_\beta$ mit $|M| \leq \aleph_{\beta'}$. Dann ist außerdem $|\alpha| \leq \aleph_{\beta'}$ für alle $\alpha \in M$ (da $\aleph_\beta$ die kleinste Ordinalzahl ist mit Kardinalität größer als $\aleph_{\beta'}$). Aus Lemma 2.3.9 folgt $|\bigcup_{\alpha\in M}\alpha| \leq \aleph_{\beta'}$. Insbesondere ist also $|\sup M| < \aleph_{\beta'}$.

(c) „Andere Kardinalzahlen lassen sich gut von unten annähern“: Zeigen Sie: Es gibt beliebig große Kardinalzahlen $\aleph_\beta$, die sich durch eine abzählbare Menge $M \subseteq \aleph_\beta$ annähern lassen, d. h. so dass $\sup M = \aleph_\beta$ ist.
Hinweis: Falls Sie keine Idee haben: In einer anderen Teilaufgabe auf diesem Blatt kam so eine Kardinalzahl vor.
Ich halte mich nicht an meinen eigenen Hinweis, sondern:
Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ gegeben; um eine Kardinalzahl der gewünschten Art zu erhalten, die größer als $\aleph_\alpha$ ist, setzen wir einfach $\beta := \alpha+\omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha+n$. Nach Bem. 3.2.8 gilt $\aleph_\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \aleph_{\alpha+n}$. Wir können also $M := \{\aleph_{\alpha+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ setzen.