Einführung in die Modelltheorie – Blatt 1

Lösungsvorschlag

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte):

(a) Sei $L = \{<, R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$ und ein dreistelliges Relationssymbol R. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als L-Struktur mit der üblichen Interpretation von $<$, und indem wir R interpretieren durch: $R^{\mathbb{Z}}(a, b, c) \iff a + b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Geben Sie in dieser Sprache Formeln an, die die folgenden Mengen definieren:

(i) $X_1 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$\phi_1(x, y) = \exists z\colon R(x, x, z) \wedge R(x, z, y)$

(ii) $X_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$\phi_2(x, y) = x < y \wedge \neg\exists z\colon (x < z \wedge z < y)$

(b) Zeigen Sie: Ist L eine beliebige Sprache und $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, so existiert eine Sprache L' und eine L'-Struktur auf M mit folgenden beiden Eigenschaften:

- L' besteht nur aus Relationssymbolen. (Eine solche Sprache L' nennt man *relational*.)
- Für jede Teilmenge $X \subseteq M^n$ (und jedes n) gilt: X ist L-definierbar genau dann, wenn X L'-definierbar ist.

Hinweis: Sie können sich einige Arbeit sparen, indem Sie (die formale Version von) Bemerkung 1.2.7 verwenden.

Definiere L' (und die Interpretation davon auf M) wie folgt; wir fassen Konstanten als 0-adische Funktionen auf:

(a) Alle Relationen von L sind auch Relationen von L'

(b) Für jede Funktion $f\colon M^n \to M$ in L füge in L' eine Relation $R_f \subseteq M^{n+1}$ für den Graph von f ein.

Offensichtlich ist L' relational. Bleibt zu zeigen, dass in L und in L' die gleichen Mengen definierbar sind. Um Bemerkung 1.2.7 anwenden zu können, setzen wir $L'' := L \cup L'$ und zeigen: (1) Jede Relation von L' ist L-defbar; (2) jede Relation und Funktion von L ist L'-defbar. (Dann folgt: L-defbarkeit ist äquiv. zu L''-defbarkeit, und das ist äquiv zu L'-defbarkeit).

Für die Relationen, die sowohl in L als auch in L' sind, ist nichts zu zeigen. Wir müssen also nur Funktionen f in L betrachten und die zugehörigen Relationen R_f in L'.

Bew von (1): R_f wird definiert durch die L-Formel $\phi(\underline{x}, y) = f(\underline{x}) \doteq y$.

Bew von (2): f wird definiert durch die L'-Formel $\phi(\underline{x}, y) = R(\underline{x}, y)$.

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien V, W K-Vektorräume. (Wir fassen V und W als $L_{K\text{-VR}}$-Strukturen auf.) Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung von V nach W ist genau dann linear, wenn Sie ein $L_{K\text{-VR}}$-Homomorphismus ist.

Sei $\alpha\colon V \to W$ eine Abbildung.

$\Rightarrow$: Sei α linear. Zu prüfen ist (nach def. von $L_{K\text{-VR}}$-Homom.): Für alle $v, v' \in V$ gilt: $\alpha(0) = 0$; $\alpha(v + v') = \alpha(v) + \alpha(v')$; $\alpha(-v) = -\alpha(v)$; $\alpha(r \cdot v) = r \cdot \alpha(v)$ für jedes $r \in K$.

All dies gilt offensichtlich, wenn α linear ist.

$\Leftarrow$: Sei α ein $L_{K\text{-VR}}$-homom., seien $v, v' \in V$ und sei $r \in K$. Dann ist

$$\alpha(v + r \cdot v') = \alpha(v) + \alpha(r \cdot v') = \alpha(v) + r \cdot \alpha(v')$$

(da α die Funktionen $+$ und $r\cdot$ aus L erhält.)

(b) Wir nehmen an, dass V nicht trival ist. Zeigen Sie, dass es nur vier verschiedene $L_{K\text{-VR}}$-definierbare Teilmengen von V gibt und geben Sie diese vier Mengen explizit an.

Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 1.3.4.

Nach Bem 1.3.4 gilt: Ist $X \subseteq V$ $L_{K\text{-VR}}$-defbar, so wird X von jedem $L_{K\text{-VR}}$-Automorphismus $\alpha\colon V \to V$ auf sich selbst abgebildet. Wir haben in (a) gesehen: $L_{K\text{-VR}}$-Automorphismen sind genau Vektorraum-Automorphismen. Sind $v, v' \in V \setminus \{0\}$ beliebig so existiert ein Automorphismus α von V, der v auf v' abbildet. (Konstruiere α z.B. indem v und v' jeweils zu Basen von V ergänzt werden und sende dann die eine Basis auf die andere.) Da $\alpha(X) = X$ sein muss, gilt also: $v \in X \iff v' \in X$. Anders ausgedrückt: Wenn X einen einzigen Vektor aus $V \setminus \{0\}$ enthält, dann gilt bereits $V \setminus \{0\} \subseteq X$. Damit bleiben nur noch die folgenden $L_{K\text{-VR}}$-defbaren Mengen: $\emptyset$, $\{0\}$, $V \setminus \{0\}$, V

Diese vier Mengen sind auch offensichtlich wirklich defbar (durch $\bot$, $x = 0$, $x \neq 0$, $\neg\bot$).

(c) Sei nun $V = K$ (immernoch als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur aufgefasst). Zeigen Sie: Jeder Untervektorraum von V^n ist $L_{K\text{-VR}}$-definierbar.

Sei $U \subseteq V^n$ ein UVR. Ein solches U lässt sich durch lineare Gleichungen beschreiben:

$$U = \{(v_1, \dots, v_n) \in V^n \mid \bigwedge_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \cdot v_i = 0\}$$

Wir sind schon fertig, da $\bigwedge_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} r_{ij} \cdot v_i = 0$ bereits eine $L_{K\text{-VR}}$-Formel (in $v_1, \dots, v_n$) ist. (Beachte, dass k und n hier fest sind.)