Einführung in die Modelltheorie – Blatt 9

Abgabe bis zum 19.12.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sind $(A,<)$ und $(B,<)$ angeordnete Mengen, so definiert man auf $A \times B$ die *lexikographische Ordnung* wie folgt: Für $(a,b),(a',b') \in A \times B$ setze

$$(a,b) < (a',b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a < a' \quad \vee \quad (a = a' \wedge b < b')$$

Im Folgenden dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die lexikographische Ordnung wieder eine Ordnungsrelation ist.

(a) Zeigen Sie: Sind A und B wohlgeordnet, so ist auch $A \times B$ (mit der lexikographischen Ordnung) wohlgeordnet.

(b) Welche der folgenden angeordneten Mengen sind ordnungsisomorph zueinander und welche nicht?
- $M_1 := \mathbb{N}$
- $M_2 := \mathbb{N} \times \{0,1\}$
- $M_3 := \{0,1\} \times \mathbb{N}$

Hierbei verwenden wir die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und auf $\{0,1\}$ und die lexikographische Ordnung auf den Produkten.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(a) Seien $(M,<)$ und $(M',<)$ wohlgeordnete Mengen. Zeigen Sie, dass maximal eine ordnungserhaltende Bijektion $f\colon M \to M'$ existiert.
Hinweis: Wenn es zwei verschiedene gäbe: Betrachten Sie das kleinste Element $a \in M$, auf dem sie sich unterscheiden.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt: Sind $(M,<)$ und $(M',<)$ nur angeordnet (aber möglicherweise nicht wohlgeordnet), so können mehrere veschiedene ordnungserhaltende Bijektionen $f\colon M \to M'$ existieren.

(c) Sei nun $(M,<)$ wieder wohlgeordnet; wir nehmen außerdem an, dass M unendlich ist. Zeigen Sie, dass eine ordnungserhaltende Injektion von M nach M existiert, die keine Bijektion ist.