Einführung in die Modelltheorie – Blatt 8

Abgabe bis zum 12.12.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Seien $K_0 \subseteq K$ Körper und sei $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq K$ eine endliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) A ist algebraisch unabhängig über K_0.

(b) Für jedes i ist a_i transzendent über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$

(c) Für jedes i ist a_i transzendent über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Hinweis für die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a): Wenn $\{a_1, \dots, a_i\}$ algebraisch abhängig über K_0 ist aber $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ algebraisch unabhängig, dann ist a_i algebraisch über $K_0(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Hinweis für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b): Wenn a_i algebraisch wäre, hätte man ein Polyom mit Koeffizienten in dem Körper $K_0(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Jeden dieser Koeffizienten kann man selbst als Quotient von gewissen Polynomen schreiben. Die Nenner kann man aber alle wegmultiplizieren.

Aufgabe 2 (1+1+1+2 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir Hilberts Nullstellensatz beweisen.

Zeigen Sie:

(a) Sind K und K' algebraisch abgeschlossene Körper, die einen gemeinsamen Unterkörper K_0 besitzen, und ist $|K| = |K'| > |K_0|$, so sind K und K' isomorph über K_0.
Hinweis: Kombinieren Sie zwei Resultate aus der Vorlesung.

(b) Seien nun $K_0 \subseteq K$ zwei algebraisch abgeschlossene Körper. Zeigen Sie, dass K bereits eine elementare Erweiterung von K_0 ist.
Hinweis: Betrachten Sie in der Sprache $L_{\mathrm{ring}}(K_0)$ eine Theorie, die über ihre Modelle $\mathcal{M}$ sagt: $\mathcal{M}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper, der K_0 enthält. Wenden Sie mit Hilfe von Teil (a) Vaughts Test auf diese Theorie an.

(c) Seien $K_0 \subseteq K$ Körper, wobei K_0 algebraisch abgeschlossen ist. Sind $f_1, \dots, f_m \in K_0[x_1, \dots, x_n]$ Polynome in n Variablen mit Koeffizienten in K_0, und hat das Gleichungssystem

$$f_1(\underline{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\underline{x}) = 0$$

eine Lösung in K, so hat es bereits eine Lösung in K_0.
Hinweis: Wenden Sie (b) auf den algebraischen Abschluss von K an.

(d) **Hilberts Nullstellensatz:** Sei K_0 ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien $f_1, \dots, f_m \in K_0[x_1, \dots, x_n]$ so, dass das von $f_1, \dots, f_m$ erzeugte Ideal in $K_0[x_1, \dots, x_n]$ nicht gleich dem ganzen Ring $K_0[x_1, \dots, x_n]$ ist. Dann besitzt das Gleichungssystem

$$f_1(\underline{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\underline{x}) = 0$$

eine Lösung in K_0.
Hinweis: Wählen Sie ein maximales Ideal I in $R := K_0[y_1, \dots, y_n]$, das $f_1(\underline{y}), \dots, f_m(\underline{y})$ enthält, setzen Sie $K := R/I$, und fassen Sie dann $f_1, \dots, f_n$ als Polynome in $K[\underline{x}]$ auf. Welches Element von K erhält man, wenn man das Tupel $(y_1, \dots, y_n) \in K^n$ in eins der Polynome f_i einsetzt? (Benutzen Sie dann (c)...)