Einführung in die Modelltheorie – Blatt 7

Abgabe bis zum 5.12.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir Tarskis Kettenlemma beweisen. Es besagt das folgende:

Sei $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine elementare Kette von L-Strukturen, d. h. für alle $i, j \in I$ gelte $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$. Dann ist $\mathcal{M} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}_j$ für jedes $j \in I$.

Wir nennen eine L-Formel $\phi(\underline{x})$ „gut" wenn gilt: Für jedes $j \in I$ und jedes Tupel $\underline{a} \in M_j^n$ gilt: $\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$.

(a) Begründen Sie: Alle atomaren L-Formeln sind gut.

(b) Zeigen Sie: Sind $\phi(\underline{x})$ und $\phi'(\underline{x})$ gut, so sind auch $\phi(\underline{x}) \wedge \phi'(\underline{x})$ und $\neg\phi(\underline{x})$ gut.

(c) Zeigen Sie: Ist $\psi(\underline{x}, y)$ gut, so ist auch $\phi(\underline{x}) := \exists y\colon \psi(\underline{x}, y)$ gut.
Hinweis für die Richtung „$\mathcal{M}_j \models \phi(\underline{a}) \Leftarrow \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$": Wenn ein $b \in M$ existiert mit $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$, dann liegt dieses b bereits in einem M_i. Verwenden Sie dann, dass die $\mathcal{M}_i$ eine elementare Kette bilden.

(d) Folgern Sie Tarsikis Kettenlemma.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir bezeichnen mit DLO die L_{ord}-Theorie der „dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte", d. h. DLO besteht aus den folgenden Axiomen:

(a) $\forall x\colon \neg x < x$

(b) $\forall x, y\colon x < y \vee x = y \vee y < x$

(c) $\forall x, y, z\colon x < y \wedge y < z \to x < z$

(d) $\forall x, y\colon x < y \to \exists z\colon (x < z \wedge z < y)$

(e) $\forall x\colon (\exists y\colon y < x) \wedge (\exists y\colon x < y)$

(a)–(c) besagen also, dass $<$ eine Ordnungsrelation ist; (d) besagt, dass zwischen je zwei Elementen noch ein weiteres Element gefunden werden kann, und (e) besagt, dass kein kleinstes und kein größtest Element existiert.

Beispiele für Modelle von DLO sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass DLO vollständig ist. (Insbesondere gilt also z. B. $\mathbb{Q} \equiv_{L_{\text{ord}}} \mathbb{R}$.)

Wir nehmen also jetzt an, dass DLO nicht vollständig ist. Zeigen Sie unter dieser Annahme:

(a) Es existieren zwei Modelle $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models$ DLO, die beide abzählbar sind aber nicht isomorph.
Hinweis: Zeigen Sie, dass eine L_{ord}-Aussage ϕ existiert mit $\mathcal{M} \models \phi$ und $\mathcal{M}' \models \neg\phi$... wobei der Satz von Löwenheim-Skolem nützlich ist, um $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ abzählbar wählen zu können.

(b) Sind $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ endliche Teilmengen, ist $f\colon A \to A'$ eine ordnungserhaltende Bijektion, und ist $b \in M$, so existiert ein $b' \in M'$ so dass f zu einer ordnungserhaltenden Bijektion $A \cup \{b\} \to A' \cup \{b'\}$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Schreiben Sie A als $\{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 < \dots < a_n$ und A' analog. Machen sie eine Fallunterscheidung danach, wo b zwischen den a_i angeordnet ist. Dass $\mathcal{M}'$ ein Modell von DLO ist, sollte Ihnen helfen zu zeigen, dass ein geeignetes $b' \in M'$ gefunden werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass eine ordnungserhaltende Bijektion von M nach M' existiert und folgern Sie, dass DLO vollständig sein muss.
Hinweis: Dass $\mathcal{M}$ abzählbar ist, bedeutet, dass sich die Elemente von M durchnummerieren lassen, d. h. $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$; und analog $M' = \{a'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Definieren Sie induktiv endliche Mengen $A_i \subseteq M$, $A'_i \subseteq M'$ und ordnungserhaltende Abbildungen $f_i\colon A_i \to A'_i$ mit folgenden Eigenschaften:
  (a) $A_{i+1} \supseteq A_i$ und $A'_{i+1} \supseteq A'_i$
  (b) f_{i+1} ist eine Fortsetzung von f_i
  (c) $a_i \in A_{i+1}$ und $a'_i \in A'_{i+1}$.
(Sie müssen bei der Definition von f_{i+1} also erstmal ein Bild für a_i finden und danach noch ein Urbild für a'_i.)
Setzen Sie dann die f_i zu einer Abbildung $M \to M'$ zusammen.