Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte):

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf einer unendlichen Indexmenge I.

(a) Zeigen Sie: Sind $J_1, \dots, J_m \subseteq I$ disunkte Mengen mit $J_1 \cup \dots \cup J_k \in \mathcal{U}$, so ist genau eine der Mengen J_k in $\mathcal{U}$.

(b) Zeigen Sie: $\mathcal{U}$ ist ein Hauptultrafilter genau dann, wenn $\mathcal{U}$ (mindestens) eine endliche Menge enthält.

(c) Sei $I' \subseteq I$. Wir wollen „$\mathcal{U}$ auf I' einschränken“. Wir definieren dazu einfach $\mathcal{U}' := \{J \subseteq I' \mid J \in \mathcal{U}\}$.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}'$ entweder ein Ultrafilter auf I' ist oder leer ist. Unter welcher Bedingung an I' ist $\mathcal{U}'$ ein Ultrafilter auf I'?

Aufgabe 2 (1+1+3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir den Ultralimes präzise machen. Um uns das Leben etwas leichter zu machen (und $\pm\infty$ als Limes zu ersparen) betrachten wir nur Folgen von Zahlen, die im Intervall $[0, 1]$ liegen.

Sei also $a_i \in [0, 1]$ für $i \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$; „groß“ und „klein“ beziehen sich auf $\mathcal{U}$.

Zu jeder Zahl $c \in [0, 1]$ definieren wir $J_c := \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \geq c\}$. Wir definieren den Ultralimes $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ als das Supremum der Menge $\{c \in [0, 1] \mid J_c \in \mathcal{U}\}$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $c < \lim_{\mathcal{U}} a_i$, so ist J_c groß.

(b) Ist $c > \lim_{\mathcal{U}} a_i$, so ist $I \setminus J_c$ groß.

(c) $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ ist die einzige Zahl $b \in [0, 1]$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$ groß.
Hinweis: Dass $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ diese Eigenschaft hat, kann man mit Hilfe von (a) und (b) zeigen. Dass andere Zahlen b nicht die Eigenschaft haben, kann man z. B. zeigen, indem man für ein geeignet gewähltes ϵ eine große Menge findet, die Disjunkt zu $\{i \in \mathbb{N} \mid |a_i - b| < \epsilon\}$ ist.

Anmerkung: Die Definition des Ultralimes funktioniert sehr viel allgemeiner: Statt $\mathbb{N}$ kann man eine beliebige Indexmenge wählen, und statt $[0, 1]$ einen beliebigen kompakten topologischen Raum X. Man erhält immer noch, dass jede Folge $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in X$ einen wohldefinierten Ultralimes $\lim_{\mathcal{U}} a_i \in X$ hat, der dadurch charakteristiert ist, dass für jede offene Umgebung U von $\lim_{\mathcal{U}} a_i$ gilt: $\{i \in I \mid a_i \in U\}$ ist groß.