Einführung in die Modelltheorie – Blatt 2

Abgabe bis zum 31.10.2022, 14:30 Uhr

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte):

Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie. Zeigen Sie:

(a) Für L-Aussagen ϕ und ψ gilt: $T \models \phi \wedge \psi$ genau dann, wenn $T \models \phi$ und $T \models \psi$.

(b) Ist c ein neues Konstantensymbol, und gilt $T \models \phi(c)$ (in der Sprache $(L \cup \{c\})$), so gilt $T \models \forall x\colon \phi(x)$.

(c) Wir nehmen wie bei (b) an, dass c ein neues Konstantensymbol ist und dass $T \models \phi(c)$ gilt. Warum folgt *nicht* $T \models \exists x\colon \phi(x)$? (Geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.)

Hinweis: Bei der gesamten Aufgabe geht es vor allem darum, die Definition von $\models$ anzuwenden, also entsprechende Modelle von T zu betrachten.

Aufgabe 2 (4+1 Punkte):

Sei L eine endliche Sprache (d. h. mit endlich vielen Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen) und sei $\mathcal{M}$ eine endliche L-Struktur (d. h. mit endlicher Grundmenge M).

(a) Zeigen Sie, dass eine L-Aussage ϕ existiert, die $\mathcal{M}$ bis auf L-Isomorphie charakterisiert, d. h. für L-Strukturen $\mathcal{N}$ gilt: $\mathcal{N} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ isomorph sind.
(Vor allem sollen Sie beschreiben, wie man eine solche Aussage ϕ erhält. Die Begründung, dass ϕ das tut, was es soll, kann etwas informell sein.)

(b) Folgern Sie: Zwei endliche L-Strukturen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ sind elementar äquivalent genau dann, wenn sie isomorph zueinander sind.