Einführung in die Modelltheorie – Blatt 11

Abgabe bis zum 23.1.2023, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei K ein unendlicher Körper, sei $L_{K\text{-VR}}$ die Sprache der K-Vektorräume und sei T die Theorie der nicht-trivialen K-Vektorräume.

(a) Begründen Sie, dass jede atomare $L_{K\text{-VR}}$-Formel $\phi(\underline{x})$ moduolo T äquivalent zu einer Formel der Form $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ ist, für gewisse $r_i \in K$.

(b) Zeigen Sie: T hat Quantoren-Elimination.

(c) Geben Sie mit Hilfe von Satz 4.1.7 einen neuen Beweis an, dass T vollständig ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $T = \mathrm{Th}_L(\mathbb{Z})$, für $L = \{s\}$, wobei s die Nachfolger-Abbildung ist, also $s(n) = n + 1$.

(a) Geben Sie eine quantorenfreie L-Formel an, die modulo T äquivalent ist zu

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \exists y\colon y \neq s(s(y)) \wedge s(y) = x_1 \wedge s(s(y)) = s(s(s(x_2))) \wedge y \neq s(x_3).$$

Sie brauchen Ihre Antwort nur ganz kurz zu begründen.

(b) Zeigen Sie: T hat Quantoren-Elimination.
Hinweis: Sie können sich das Leben erleichtern, indem Sie zunächst prüfen, dass atomare L-Formeln ohne Einschränkung die Form „$x = y + k$“ haben (für Variablen x, y und ein festes $k \in \mathbb{Z}$).