Einführung in die Modelltheorie

Anwesenheitsaufgaben vom 28.11.2022

Prof. I. Halupczok

Aufgabe 1:

Sei $\mathcal{M}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$. Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{M} \prec \mathcal{N} \iff$
(b) $\mathcal{M} \equiv_{L(M)} \mathcal{N} \iff$
(c) Für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ gilt: $\phi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N}) \cap M^n$.

Aufgabe 2:

Sei weiterhin $\mathcal{M}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$. Geben Sie Beisipiel an, die zeigen: Ist $\mathcal{M}$ keine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$, so muss in (c) keine der beiden Inklusionen gelten.

Sie können sogar versuchen, ein einziges Beispiel zu finden (von Strukturen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ und einer Formel $\phi(\underline{x})$), so dass weder $\phi(\mathcal{M}) \subseteq \phi(\mathcal{N}) \cap M^n$ noch $\phi(\mathcal{M}) \supseteq \phi(\mathcal{N}) \cap M^n$ gilt.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie: Ist $\alpha \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine elementare Einbettung, so ist α insbesondere eine Einbettung im Sinne von Definition 1.3.2 (b).

Aufgabe 4:

In Aufgabe 1 macht Bedingung (b) auch dann Sinn, wenn $\mathcal{M}$ keine Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist. Wie kann man Bedingung (a) interpretieren, damit immer noch die Äquivalenz (a) $\Rightarrow$ (b) gilt?

Aufgabe 5:

Sei L die leere Sprache und seien $M \subseteq N$ zwei unendliche Mengen, aufgefasst als L-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist.