

Aufgabe 1:

Wir arbeiten in \mathbb{R} als L_{ring} -Struktur. Geben Sie eine L_{ring} -Formel an, die die folgende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert:

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2:

(a) Definieren Sie unter Verwendung der Funktion f aus Aufgabe 1 die Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(b) Geben nun eine L_{ring} -Formel an, die g definiert, ohne f zu verwenden.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und sei V eine $L_{K\text{-VR}}$ -Struktur.

- (a) Gibt es eine $L_{K\text{-VR}}$ -Aussage ϕ , so dass ϕ in V gilt genau dann, wenn V ein K -Vektorraum ist?
- (b) Gibt es eine Menge T von $L_{K\text{-VR}}$ -Aussagen, so dass alle $\phi \in T$ in V gelten genau dann, wenn V ein K -Vektorraum ist?

Aufgabe 4:

Geben Sie eine L_{\emptyset} -Aussage ϕ an, so dass für Mengen M gilt: $M \models \phi \iff \#M = 3 \vee \#M = 4$.

Aufgabe 5:

Gibt es L_{ring} -Formeln ϕ_i mit...

- (a) ... $\phi_1(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$?
- (b) ... $\phi_2(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$?
- (c) ... $\phi_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$?