§3 Rationalität von Poincaré-Reihen

Ziel: Geg: $\underline{f} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^l$, p prim

$$N_r := \# V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$$

$$P_{\underline{f},p} := \sum_{r \geq 0} N_r \cdot Z^r \quad \in \mathbb{Q}[[Z]]$$

Möchte zeigen: $P_{\underline{f},p} \in \mathbb{Q}(Z)$ ... z.T. uniform in p
(In dieser Vorlesung: nur für $p >> 0$)

Überblick über Bew.-Idee: $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p$

- Urbild von $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$ in $\mathbb{Z}_p$:

  $$X_r := \{\underline{a} \in \mathbb{Z}_p^n \mid \underbrace{f_i(\underline{a}) \in p^r\mathbb{Z}_p}_{\Leftrightarrow\, v(f_i(\underline{a})) \geq r} \ \forall i\}$$

  $\uparrow$

  L_{Dp}-def'bare Familie von Mengen
- Jedes Element von $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$ entspricht einem Ball in X_r der Form $\underline{a} + (p^r\mathbb{Z}_p)^n$
- Habe Maß μ auf $\mathbb{Q}_p$.

  Dann: $\# V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p) = \dfrac{\mu(X_r)}{\mu(p^r\mathbb{Z}_p)^n}$
- Zeige dann:

  Ist $Y_r \subset \mathbb{Q}_p^n$ eine Fam. von def'baren Mengen, parametrisiert durch ein $r \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ als TM der Wertegruppe),

  so ist $\sum_{r \in \mathbb{N}} \mu(Y_r) \cdot Z^r \in \mathbb{Q}(Z)$

  $Y \in \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Z}$

  $Y_r = \{\underline{a} \mid (\underline{a}, r) \in Y\}$

3.1 Zerlegung in krumme Quader

Sei $L \supset L_{RV}$ eine RV-Expansion, sei $K \models HEN_{0,0}$ eine L-Struktur.

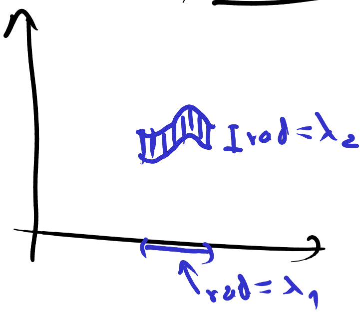
Sei $A \subset K \cup RV$.

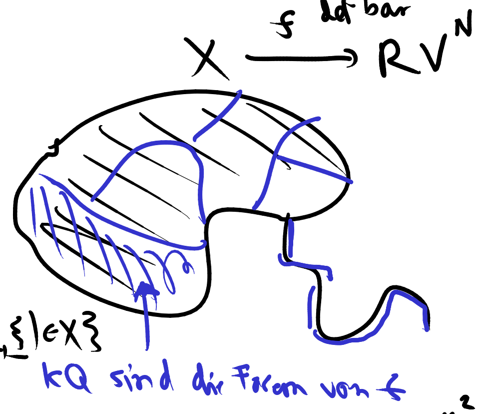
Def. 3.1.1: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Gamma \cup \{\infty\}$. Ein krummer Quader ($kQ$) mit Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist eine def'bare TM $Q \subset K^n$ der folgenden Form:

(a) Falls $n = 1$: Q ist ein offener Ball mit Radius λ_1 (falls $\lambda_1 < \infty$) bzw. ein Punkt, falls $\lambda_1 = \infty$

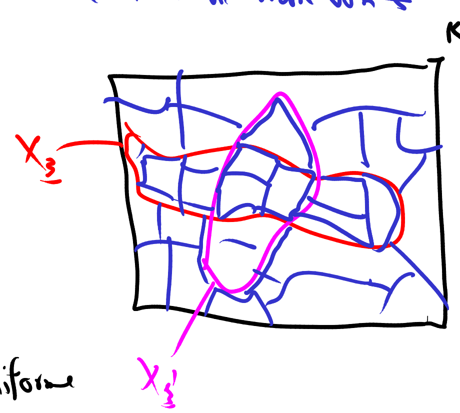
(b) Falls $n \geq 2$: • Die Projektion $Q' := \pi(Q) \subset K^{n-1}$ auf die ersten $n-1$ Koordinaten ist ein kQ mit Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

• Für jedes $a \in Q'$ ist die Faser $Q_a = \{b \mid (a,b) \in Q\}$ ein kQ mit Radius λ_n ist.





Satz 3.1.2: Sei $X \subset K^n \times RV^m$ A-def'bar. Dann existiert eine A-definierbare Abb $f: K^n \to RV^N$, deren Fasern kQ sind und so dass für jedes $\xi \in RV^m$ die Menge $X_\xi = \{a \in K^n \mid (a, \xi) \in X\}$ eine Vereinigung (möglicherweise unendlich) von Fasern von f ist.



Bem: $\iff$ $\forall\, a, a' \in K^n$: Aus $f(a) = f(a')$ folgt

$$X_a = X_{a'}$$
$$X_a = \{\xi \in RV^m \mid (a, \xi) \in X\}$$

Bem 3.1.3: Der Satz impliziert auch die folgende uniforme Version: Zu jeder L-Fml $\varphi(x, \xi, z)$ ex. eine L-Fml $\psi(\dots, z)$ s.d. gilt: Für jedes $K \models HEN_{0,0}$ und jedes Param-Tupel $a \in (K \cup RV)^n$ (der selben Sorte wie z) gilt: Ist $X = \varphi(K, a)$, so definiert $\psi(\dots, a)$ ein f wie in 3.1.2.

Bew: Kompaktheit.

Lemma 3.1.4: Ist $C \subset K$ endlich und A-def'bar, so existiert eine A-def'bare Abb. $f: K \to RV^N$, so dass für $a, a' \in K$ gilt:

$$f(a) = f(a') \iff \forall c \in C: rv(a-c) = rv(a'-c)$$

Bsp: $A = \emptyset$, $C = \{\pm\sqrt{2}\}$ ... was ist f ??

Bew: Zu $x \in K$ betrachte

• $\{v(x-c) \mid c \in C\} = \{\lambda_1(x), \dots, \lambda_{k(x)}(x)\}$ mit $\overbrace{\lambda_1(x) < \dots < \lambda_{k(x)}(x)}^{L^{eq}(A \cup \{x\})\text{-def'bar}}$

- $C_i(x) := \{c \in C \mid v(x-c) \geq \lambda_i\}$
- $s_i(x) := \sum_{c \in C_i(x)} rv(x-c)$

$\Big\}$ $L(A \cup \{x\})$-def'bar $\quad (C_1(x) = C)$

bzw. $s_i(x) = 0$ falls Summe nicht wohldef.

- $f(x) := (s_1(x), \dots, s_{k(x)}(x), 0, \dots, 0) \in RV^N$, $N = \# C$
- Prüfe: $\forall a, a'$: $f(a) = f(a') \iff \forall c \in C: rv(a-c) = rv(a'-c)$
- „$\Leftarrow$": klar ($rv(a-c)$ legt $v(a-c)$ fest, und damit auch $\lambda_i, C_i, s_i \dots$)
- „$\Rightarrow$": Seien $a, a' \in K$ mit $s_i(a) = s_i(a')$ $\forall i$
  - Zeige per Induktion über i:

    (1) $v(a-a') > \lambda_i$

    (2) $C_{i+1}(a) = C_{i+1}(a')$

    (für $i = k(a)$ folgt dann: $v(a-a') > v(a-c)$ $\forall c \in C$ $\Rightarrow rv(a-c) = rv(a'-c)$)
  - Bem: $C_1(a) = C_1(a') = C$
  - <u>Bew (1)</u>: Habe $C_i(a) = C_i(a') =: C_i$ nach Ind. Ann.

$$\{\xi \mid \xi \approx \sum_{c \in C_i} rv(a-c)\} = rv\Big(\underbrace{\sum_{c \in C_i} \underbrace{rv^{-1}(rv(a-c))}_{\text{off. Ball}: B_{>v(a-c)}(a-c)}}_{\text{off. Ball}: B_{>\lambda_i}\left(\sum_{c \in C_i}(a-c)\right)}\Big)$$

Analog für a'

$$\Rightarrow B_{>\lambda_i}\Big(\sum_{c \in C_i}(a'-c)\Big) = B_{>\lambda_i}\Big(\sum_{c \in C_i}(a-c)\Big)$$

$$\iff v\Big(\underbrace{\sum_{c \in C_i}(a'-c)}_{\# C_i \cdot a' - \sum_{c \in C_i} c} - \underbrace{\sum_{c \in C_i}(a-c)}_{\dots\text{analog}}\Big) > \lambda_i$$

$$\iff \underbrace{v(\# C_i (a'-a))}_{= \underbrace{v(\# C_i)}_{=0} + v(a'-a)} > \lambda_i$$

- <u>Bew (2)</u>: $C_{i+1}(a) = \{c \in C \mid v(a-c) \geq \lambda_{i+1}\} = \{c \in C \mid \underbrace{v(a-c) > \lambda_i}_{\iff v(a'-c) > \lambda_i}\}$

  (da $v(a'-a) > \lambda_i$)

$\Rightarrow C_{i+1}(a') = C_{i+1}(a)$

$\square$

Bem 3.1.5: Aus Kompaktheit folgt eine Version von 3.1.4, die uniform in den Parametern und in allen Modellen von $HEN_{0,0}$ funktioniert.

Bew von 3.1.2:
- Sei also $X \subset K^n \times RV^m$ A-def'bar.
- Im Folgenden sei $\underline{x} \in K^{n-1}$, $y \in K$, $\underline{\xi} \in RV^m$
- X wird definiert durch $\varphi\left(\left(rv(f_i(\underline{x},y))\right)_i, \underline{\xi}\right)$ (nach VF-qf)
  ($f_i \in R[\underline{x},y]$, $R \subset K$ ist der von $A \cap K$ erzeugte Ring)
- Fixiere $\underline{b} \in K^{n-1}$ $A \cup \{\underline{b}\}$-def'bar
- Wähle $C_{\underline{b}} \subset K$ endlich, so dass $rv(f_i(\underline{b},y))$ nur von $(rv(y-c))_{c \in C_{\underline{b}}}$ abhängt, nämlich: $C_{\underline{b}}$ ist die Menge aller Abl-NSt aller $f_i(\underline{b},y) \in K[y]$ (Satz 2.3.7)

  ($\forall b' \in K\ \exists c \in C_{\underline{b}}$: $f_i(\underline{b},y)$ hat keine um-c-Koll. bei b' $\Rightarrow$ $rv(f_i(\underline{b},b'))$ wird durch $rv(b'-c)$ festgelegt)

- Mit Lemma 3.1.4 erhalte

Nach 3.1.5 sogar uniform in $\underline{b}$, d.h. $(\underline{b},b') \mapsto g_{\underline{b}}(b')$ ist A-def'bar

$g_{\underline{b}}: K \longrightarrow RV^N$ $A \cup \{\underline{b}\}$-def'bar

s.d.: $\forall b', b'': g_{\underline{b}}(b') = g_{\underline{b}}(b'') \Leftrightarrow rv(b'-c) = rv(b''-c)\ \forall c \in C_{\underline{b}}$

$$(*) \searrow \quad \Downarrow$$
$$rv(f_i(\underline{b},b')) = rv(f_i(\underline{b},b''))\ \forall i$$
$$\Downarrow$$
$$\{\underline{\xi} \in RV^m \mid (\underline{b},b',\underline{\xi}) \in X\} = X_{\underline{b},b'} = X_{\underline{b},b''}$$

- Die Fasern von $g_{\underline{b}}$ sind Schnitte von Mengen der Form $\{y \mid rv(y-c) = \eta\}$, also krumme Quader (in K)
- $(*) \Rightarrow \exists h_{i,\underline{b}}: RV^N \longrightarrow RV: \forall b' \in K: rv(f_i(\underline{b},b')) = h_{i,\underline{b}}(g_{\underline{b}}(b'))$
  ($h_{i,\underline{b}}$ ist uniform in $\underline{b}$ def'bar)
- Sei $X'_{\underline{b}} \subset RV^N \times RV^m$ definiert durch $\varphi\left((h_{i,\underline{b}}(\underline{\zeta}))_i, \underline{\xi}\right)$. $\underline{\zeta} \in RV^N$

  Dann ist, für $b' \in K$: $X_{\underline{b},b'} \overset{(\Delta)}{=} X'_{\underline{b},g_{\underline{b}}(b')}$
  $$\| $$
  $$\{\underline{\xi} \in X'_{\underline{b}} \mid (g_{\underline{b}}(b'), \underline{\xi}) \in X''_{\underline{b}}\}$$
- $X''_{\underline{b}} := \{(\underline{\zeta},\underline{\xi},\eta) \in X'_{\underline{b}} \times RV \mid v_{RV}(\eta) = rad(g_{\underline{b}}^{-1}(\underline{\zeta}))\}$
- Sei X'' die „Gesamt-Menge" zu den $X''_{\underline{b}}$, d.h.
  $X'' := \{(\underline{b},\underline{\zeta},\underline{\xi}) \in K^{n-1} \times RV^N \times RV^m \mid (\underline{\zeta},\underline{\xi}) \in X''_{\underline{b}}\}$
- Wende Induktion auf X'' an. Erhalte so A-def'bar Abb.
  $g': K^{n-1} \longrightarrow RV^{N'}$ s.d.:

- Fasern sind kQ
- $X''_{\underline{b}}$ hängt nur von $g'(\underline{b})$ ab.

- Setze $g'': K^n \longrightarrow RV^{N'} \times RV^N$, $(\underline{b}, b') \longmapsto (g'(\underline{b}), g_{\underline{b}}(b'))$
- Beh: $X_{\underline{b},b'}$ hängt nur von $g''(\underline{b},b')$ ab.

Bew: Sei $g''(\underline{b}_1, b'_1) = g''(\underline{b}_2, b'_2)$ $\qquad \underline{\xi} := g_{\underline{b}_i}(b'_i)$

$$\Rightarrow X''_{\underline{b}_1} = X''_{\underline{b}_2} \Rightarrow X'_{\underline{b}_1} = X'_{\underline{b}_2}$$

$$X_{\underline{b}_1,b'_1} \overset{(\Delta)}{=} X'_{\underline{b}_1,\underline{\xi}} = X'_{\underline{b}_2,\underline{\xi}} \overset{(\Delta)}{=} X_{\underline{b}_2,b'_2}$$

- Beh: Die $\underbrace{\text{Fasern von } g''}$ sind kQ

$$= \{(\underline{b},b') \in K^{n-1} \times K \mid \underbrace{g'(\underline{b}) = \underline{\xi}'}_{\text{definiert kQ } Q' \subset K^{n-1}},\ \underbrace{g_{\underline{b}}(b') = \underline{\xi}}_{\text{definiert kQ in } K} \}, \quad \underline{\xi}' \in RV^{N'},\ \underline{\xi} \in RV^N$$

Radius davon ist durch $\underline{\xi}$ und $X''_{\underline{b}}$ festgelegt.
Für $\underline{b}_1, \underline{b}_2 \in Q'$ gilt: $X''_{\underline{b}_1} = X''_{\underline{b}_2}$
$\Rightarrow$ Radius gleich. $\square$

3.2 Maßen in $\mathbb{Q}_p$

Satz 3.2.1: Auf jeder lokal kpkten top. Grp. G existiert ein bis auf Skalierung eindeutiges $\underbrace{\text{links-invariantes}}$ Borel-Maß μ.

$X \subset G$, $a \in G$

$$\mu(a \cdot X) = \mu(X)$$

Def 3.2.2: Das Maß μ aus 3.2.1 heißt Haar-Maß.

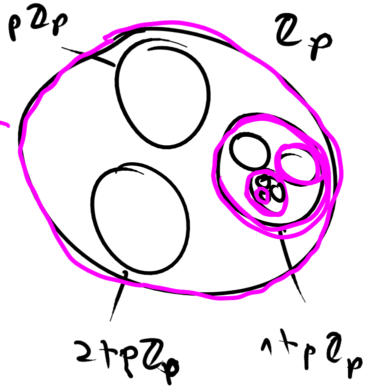
Satz 3.2.3: $\mathbb{Z}_p$ ist kpkt. Insbes ist $(\mathbb{Q}_p, +)$ eine lok. kpkte top. Grp.

Bew: • Sei $(U_i)_{i \in I}$ off. Überdeckung von $\mathbb{Z}_p$. Ann: Ex. keine endl. Teilüberdeckung.

- $\Rightarrow$ Ex. $0 \leq r_0 < p$ so, dass $r_0 + p\mathbb{Z}_p$ nicht von endl. vielen der U_i überdeckt wird
(da $\mathbb{Z}_p = (0 + p\mathbb{Z}_p) \cup \dots \cup ((p-1) + p\mathbb{Z}_p)$)
- Wiederhole; erhalte so Folge $(r_j)_j$, s.d. $r_0 + pr_1 + \dots + p^j r_j + p^{j+1}\mathbb{Z}_p$ nicht von endl. vielen U_i überdeckt wird.

- $a := \sum_{j\in\mathbb{N}} r_j p^j \in \mathbb{Z}_p$
- Ex. i_0 s.d. $a \in U_{i_0}$
- Da U_{i_0} offen: Ex. $r\in\mathbb{N}$: $\underbrace{B_{\geq r}(a)}_{= a + p^r\mathbb{Z}_p} \subset U_{i_0}$

nicht von endl. vielen U_i überdeckbar



Widerspruch zu: $a+p^r\mathbb{Z}_p$ wird nicht von endl. vielen U_i überdeckt. □

Def. 3.2.4: Von nun an sei μ das Haar-Maß auf $(\mathbb{Q}_p,+)$, so normiert, dass $\mu(\mathbb{Z}_p)=1$ ist. Das Produktmaß auf $\mathbb{Q}_p^n$ wird auch mit μ bezeichnet.

(Bem: μ nimmt Werte in $\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ an (und nicht in $\mathbb{Q}_p$))

Lemma 3.2.5: Das Maß eines Balls $B_{\geq r}(a)\subset\mathbb{Q}_p$ ist p^{-r} $(a\in\mathbb{Q}_p, r\in\mathbb{Z})$

——— " ——— $B_{>r}(a)$ — " —— p^{-r-1}

$= B_{\geq r+1}(a)$

Bew:
- $\mu(B_{\geq 0}(a)) = \mu(\mathbb{Z}_p) = 1$
- $p^r\mathbb{Z}_p = \underbrace{p^{r+1}\mathbb{Z}_p}\,\dot\cup\,\underbrace{(p^r + p^{r+1}\mathbb{Z}_p)}\,\dot\cup\,\underbrace{(2p^r+p^{r+1}\mathbb{Z}_p)}\,\dot\cup\dots\dot\cup\,\underbrace{((p-1)p^r + p^{r+1}\mathbb{Z}_p)}$

haben alle das gleiche Maß

$\Rightarrow \mu(p^r\mathbb{Z}_p) = p\cdot\mu(p^{r+1}\mathbb{Z}_p)$

- Lemma folgt durch wiederholtes Anwenden davon.

($\mu(p\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{p}\cdot\mu(\mathbb{Z}_p) = p^{-1}$ ...) □

Satz 3.2.6: L_{DP}-def'bare Mengen $X\subset\mathbb{Q}_p^n$ sind Borel-messbar. Genauer:

Ist $f:\mathbb{Q}_p^n \longrightarrow RV^N$ wie in Satz 3.1.2, so gilt:

$$\mu(X) = \sum_{\xi\in f(X)} p^{-g(\xi)-n},$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$

wobei $g(\xi)\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ die Summe der Radien des KQ $f^{-1}(\xi)$ ist.

Bem: Habe Existenz von f für Modelle von $HEN_{0,0}$ gezeigt (uniform nach Bem 3.1.3)

Aus Kpktheit folgt Existenz von f auch in $\mathbb{Q}_p$, für p hinreichend groß.

In dieser Vorlesung „zeige 3.2.6 nur für hinreichend große p" (in Abhängigkeit von der Fml, die X definiert.

Bem: Das obige g ist def'bar.

Bew: • X ist abzählbare Vereinigung von Fasern von f, d.h. reicht zu prüfen:

Ist Q so eine Faser, d.h. irgendein kQ mit Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $\mu(Q) = p^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_n - n}$

- Falls $n = 1$: Q ist off. Ball mit Radius $\lambda_1 \Rightarrow \mu(Q) = p^{-\lambda_1 - 1}$
- Sonst: • $Q' := \pi(Q) \subset K^{n-1}$ Proj auf erste $n-1$ Koord
  - Das Maß jeder Faser ist $p^{-\lambda_n - 1}$

    $\Rightarrow \mu(Q) = \mu(Q') \cdot p^{-\lambda_n - 1} = p^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_n - n}$ $\square$

3.3 Rationalität von Presburger-Poincaré-Reihen

Arbeite in $L_{Pres} = \{0, +, -, <, 1\} \cup \{\equiv_\ell \mid \ell \geq 1\}$

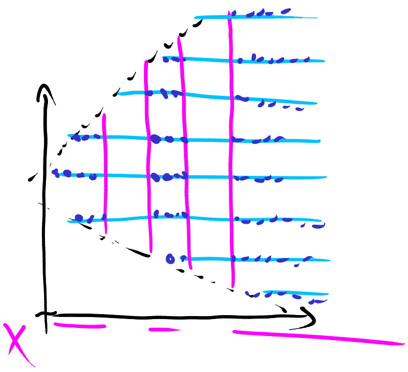
Konvention 3.3.1: Mit einer **linearen Abb** von $\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{Z}^m$ ist gemeint: eine Abb. der Form $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$, für $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$, $\underline{b} \in \mathbb{Z}^m$

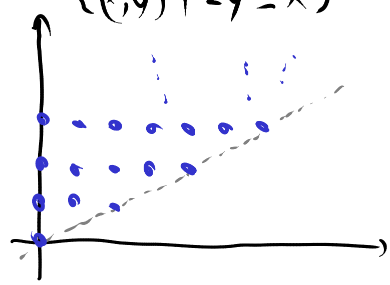
Lemma 3.3.2 (Presburger Zellzerlegung): Jede def'bare Teilmenge von $\mathbb{Z}^n$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von endl. vielen Mengen der folgenden Form schreiben:

$$\{(\underline{x}, y) \in X \times \mathbb{Z} \mid f(\underline{x}) \leq r \cdot y < g(\underline{x}),\ y \equiv_\ell c\}$$

für • $X \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ def'bar

- f linear oder $= -\infty$
- g linear oder $= +\infty$
- $r \geq 1$ $(r \in \mathbb{N})$
- $\ell \geq 1$ $(\ell \in \mathbb{N})$
- $c \in \{0, \dots, \ell - 1\}$





Bem: Eine **Zelle** ist eine Menge wie man sie erhält, wenn man das Lemma rekursiv auf alle Koord. anwendet.

Bew: • Sei $Z \subset \mathbb{Z}^n$ def'bar. Nach Satz 2.6.5. wird Z durch eine qf-Fml definiert. (Atome: $r_i y \ \square_i \ f_i(\underline{x})$ $\quad \square_i \in \{=, <, \equiv_{\ell_i}\}$)

- Ersetze „$=$“ durch „$\neg(< \vee >)$“
- Werde die „$\vee$“ in der Fml los:

  Z ist disjunkte Vereinigung von endl. vielen Mengen, die durch

Konjunktionen von $r_i y \;\square_i\; f_i(\underline{x})$ definiert werden, $\square_i \in \{<, \geq, \equiv_{\ell_i}, \not\equiv_{\ell_i}\}$

- **Kongruenz-Bed. vereinfachen:**
  - Nach Zerlegung werde $\not\equiv_\ell$ los. (Ersetze $\not\equiv_{\ell} f_i$ durch $\equiv_{\ell_i} f_i+1, \dots, \equiv_{\ell_i} f_i+\ell-1$)
  - Nach Zerlegung bzgl $\underline{x}$-Koord: o.E. $f_i(\underline{x})$ konstant mod ℓ_i (Erlaube in der Fall beliebige Bed an $\underline{x}$)

    Ersetze so $f_i(\underline{x})$ durch c_i
  - Mit chin. Restsatz (und evtl weiterer Zerlegung) reduziere auf eine einzige Kongruenz-Bed. der Form $y \equiv_\ell c$.
- **Schranken-Bed. vereinfachen:**
  - Durch Durchmultiplizieren erreiche, dass alle r_i gleich $r \geq 1$ sind. (Habe dann $\square_i \in \{<, \geq, \leq, >\}$)
  - Durch Verschieben um eins: $\square_i \in \{\geq, <\}$
  - Durch weitere Zerl. nach $\underline{x}$-Koord. reduziere auf max eine untere und max. eine obere Schranke. $\square$

Satz 3.3.3 (Rektilinearisierung): Jede def'bare Teilmenge $Z \subset \mathbb{Z}^n$ lässt sich als disjunkte Vereinigung schreiben von Mengen der Form $f_i(\mathbb{N}^{k_i})$, für injektive lin. Abb. $f_i: \mathbb{Z}^{k_i} \to \mathbb{Z}^n$ und $k_i \leq n$

Bew: • Zerlege Z mit Lemma 3.3.2. Also o.E.

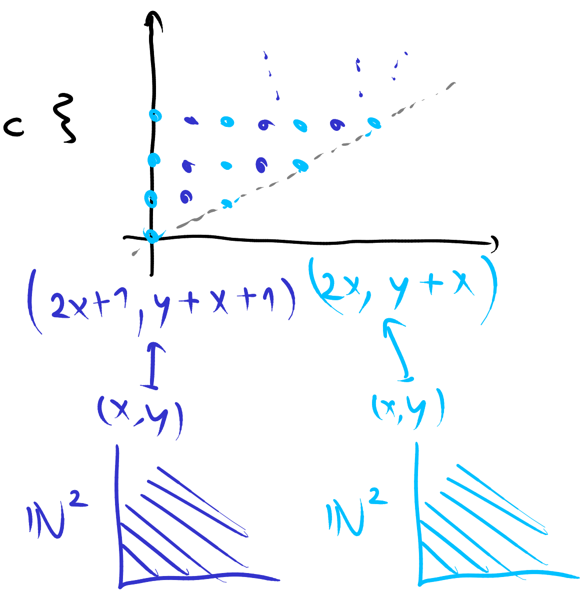
$$Z = \{(\underline{x}, y) \in X \times \mathbb{Z} \mid f(\underline{x}) \leq r\cdot y < g(\underline{x}),\ y \equiv_\ell c\}$$

- O.E. $f(\underline{x}) \neq -\infty$: Sonst:
  - Falls $g(\underline{x}) \neq +\infty$:

    Ersetze Z durch $Z' = \{(\underline{x}, -y) \mid (\underline{x}, y) \in Z\}$
  - Sonst: $Z = X \times \{y \mid y \equiv_\ell c\}$

    $= \{(\underline{x},y)\in Z \mid y \geq 0\} \cup$

    $\{(\underline{x},y) \in Z \mid y<0\}$
  - Behandle diese beiden Stücke einzeln



- O.E. $r = 1$:
  - Zerlege X in Stücke $X' = \{\underline{x} \in X \mid \underline{x} \equiv_r \underline{a}\}$, für $\underline{a} \in \{0, \dots, r-1\}^{n-1}$
    und Z in $Z' = \{(\underline{x}, y) \in Z \mid \underline{x} \in X'\}$
  - $X' = \{r \cdot \underline{x}'' + \underline{a} \mid \underline{x}'' \in X''\}$ für $X'' \subset \mathbb{Z}^{n-1}$ geeignet.
  - $Z' = \{(r \cdot \underline{x}'' + \underline{a}, y) \mid (\underline{x}'', y) \in Z''\}$ mit
    $$Z'' = \{(\underline{x}'', y) \mid \underline{x}'' \in X'', \underbrace{f(r \cdot \underline{x}'' + \underline{a})}_{f''} \le ry < g(r \cdot \underline{x}'' + \underline{a}), y \equiv_\ell c\}$$
  - Habe also $f'' = \sum b_i x_i'' + c$
    mit $r \mid b_i$. O.E: $r \mid c$:

    $f(x) = 2x$
    $f(4x+1) \le 4y$
    $f'' = 8x + 2 \le 4y$
    $\rightsquigarrow 8x + 4 \le 4y$
    - Ersetze c durch die nächst größere durch r teilbare Zahl c'
      $(\sum b_i x_i'' + c \le ry \iff \sum b_i x_i'' + c' \le ry)$
  - Analog: r teilt alle Koeff von g.
  - Teile die ganze Ungleichung durch r. Arbeite mit Z'' weiter.
    (Z ist Bild von Z'' unter lin. Abb.)
- O.E. $Z = \{(\underline{x}, y) \in X \times \mathbb{Z} \mid f(\underline{x}) \le y < g(\underline{x})\}$:
  - Durch anwenden von $(\underline{x}, y) \mapsto (\underline{x}, y - c)$: o.E $c = 0$
    (d.h. $Z = \{ \dots\dots \wedge \ell \mid y\}$
  - Analog zu oben sorge dafür, dass alle Koeff von f und g durch ℓ teilbar sind. (Um die konst Koeff durch ℓ teilbar zu bekommen, nutze die Bed. $\ell \mid y$)
    Also: $f(\underline{x}) = \ell \cdot f'(\underline{x})$, $g(\underline{x}) = \ell \cdot g'(\underline{x})$
  - $Z' := \{(\underline{x}, y) \in X \times \mathbb{Z} \mid f'(\underline{x}) \le y < g'(\underline{x})\}$
    Dann ist Z das Bild von Z' unter $(\underline{x}, y) \mapsto (\underline{x}, \ell \cdot y)$
- O.E: $g(\underline{x}) > f(\underline{x}) \ \forall \underline{x} \in X$ (sonst ersetze X durch $\{\underline{x} \in X \mid f(\underline{x}) < g(\underline{x})\}$)
- O.E: $X = \mathbb{N}^k$ ($k \le n-1$):
  - Nach Ind: X ist disj Vereinigung von $h_i(\mathbb{N}^{k_i})$
    Durch Zerlegung von Z in $\{(\underline{x}, y) \in Z \mid \underline{x} \in h_i(\mathbb{N}^{k_i})\}$
    o.E. $X = h(\mathbb{N}^k)$
  - $Z' := \{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{Z} \mid (h(\underline{x}), y) \in Z\}$
    $= \{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{Z} \mid f(h(\underline{x})) \le y < g(h(\underline{x}))\}$
    (Z ist das Bild von Z' unter $(\underline{x}, y) \mapsto (h(\underline{x}), y)$)

- OE habe $g(\underline{x}) =$ (a) $+\infty$

  oder (b) $f(\underline{x})+1$

  oder (c) $f(\underline{x}) + x_{i_0}$ für ein $i_0 \in n-1$

  - $f = \sum a_i x_i + b$, $g = \sum a_i' x_i + b'$

    Da $g(\underline{x}) \geq f(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{N}^k$: $a_i \leq a_i'$, $b \leq b'$ (aber nicht alle Koeff gleich)

  - Zerlege Z in Mengen wie in (b) oder (c) durch Einfügen von Zwischenschranken: $g - f = \sum_{j=1}^{N} h_j$, für $h_j(\underline{x}) = 1$ oder $h_j(\underline{x}) = x_{i_j}$

    $f_0 := f$, $f_j := f_{j-1} + h_j$ $(f_N = g)$

    $$Z = \dot{\bigcup_j} \{(\underline{x}, y) \mid f_{j-1}(\underline{x}) \leq y < f_j(\underline{x})\}$$

- $\underline{\text{OE } f(\underline{x}) = 0}$:

  Z ist das Bild von $\{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq y < g(\underline{x}) - f(\underline{x})\}$ unter $(\underline{x}, y) \mapsto (\underline{x}, y + f(\underline{x}))$

- Also habe: (a) $Z = \mathbb{N}^{k+1}$ Fertig

  (b) $Z = \mathbb{N}^k \times \{0\}$ (Das ist ein Bild von $\mathbb{N}^k$). Fertig.

  (c) $Z = \{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid y < x_{i_0}\}$

  Tausche die Var. x_{i_0} und y. Habe danach:

  $Z = \{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x_{i_0} < y\}$

  $= \{(\underline{x}, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{Z} \mid x_{i_0} < y\}$

  Das ist Fall (a) (bevor f zu 0 gemacht wurde), also erledigt. $\square$

- $\underline{\text{Def 3.3.4}}$: Sei $X \subset \mathbb{N}^n$ beliebig. Die $\underline{\text{Poincaré Reihe}}$ zu X ist

  $$P_X(z_1, \dots, z_n) := \sum_{\underline{r} \in X} \underbrace{z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}}_{\underline{z}^{\underline{r}} :=} \in \mathbb{Z}[[z_1, \dots, z_n]] = \mathbb{Z}[[z_1]][[z_2]] \cdots [[z_n]]$$

- $\underline{\text{Satz 3.3.5}}$: Ist $X \subset \mathbb{N}^n$ def'bar, so ist P_X eine rationale Fkt; genauer:

  $P_X = \frac{g}{h}$ für Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$, wobei h ein Produkt von Polynomen der Form $1 - \underline{z}^{\underline{a}}$ ist, für $\underline{a} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$

- **Bew:** • Nach Satz 3.3.4 o.E. $X = f(\mathbb{N}^k)$, für $f: \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^n$ linear, inj.
  (Zerlege X in Stücke; addiere die Poincaré-Reihe der Stücke zusammen.)
  - $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$, für $A \in \mathbb{Z}^{n\times k}$, $\underline{b} \in \mathbb{Z}^n$

    Da $f(\mathbb{N}^k) \subset \mathbb{N}^n$: $\underset{(a_{ij})_{i,j}}{\overset{\shortparallel}{A}} \in \mathbb{N}^{n\times k}$, $\underline{b} \in \mathbb{N}^n$
  - $$P_X(\underline{z}) = \sum_{\underline{x}\in\mathbb{N}^k} \underbrace{\underline{z}^{A\underline{x}+\underline{b}}}_{\prod_i z_i^{\sum_j a_{ij}x_j + b_i} = \prod_{i,j} z_i^{a_{ij}x_j} \cdot \prod_i z_i^{b_i}} = \prod_i z_i^{b_i} \Big(\sum_{x_1} \underbrace{\prod_i z_i^{a_{i1}x_1}}_{\sum_{x_1\in\mathbb{N}}\left(\prod_i z_i^{a_{i1}}\right)^{x_1} = \frac{1}{1-\prod_i z_i^{a_{i1}}}}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{x_k} \underbrace{\prod_i z_i^{a_{ik}x_k}}_{\ldots = \ldots a_{ik}}\Big)$$

    $$P_X(\underline{z}) = \prod_i z_i^{b_i} \prod_j \frac{1}{1 - \underbrace{\prod_i z_i^{a_{ij}}}_{\underline{z}^{\underline{c}_j}}} \qquad (\underline{c}_j = j\text{-te Spalte von } A)$$

    Prüfe noch: $\underline{c}_j \neq 0$: Folgt aus Injektivität von f. $\square$

3.4 Rationalität von L_{DP}-Poincaré-Reihen

- **Def 3.4.1:** Sei $X \subset \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{N}^m$ so, dass für jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ die Menge $X_{\underline{r}} := \{\underline{a} \in \mathbb{Q}_p^n \mid (\underline{a}, \underline{r}) \in X\}$ messbar ist und endliches Maß hat. Dann definieren wir die zugehörige Poincaré-Reihe als

  $$P_X(\underset{(z_1,\ldots,z_m)}{\overset{\shortparallel}{\underline{z}}}) := \sum_{\underline{r}\in\mathbb{N}^m} \mu(X_{\underline{r}}) \cdot \underline{z}^{\underline{r}}$$

Satz 3.4.1: Sei $\varphi(\underline{x}, \underline{\lambda})$ eine L_{DP}-Fml, $\underline{x}$ n-Tupel von VF-Var, $\underline{\lambda}$ m-Tupel von Γ_∞-Var. Wir nehmen an, dass für jede Primzahl p und für jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ die Menge $\varphi(\mathbb{Q}_p, \underline{r})$ endliches Maß hat und dass $\varphi(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{N}^m$ ist. Dann existiert ein $M > 0$, ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[\underline{z}, P]$ und endl. viele Ring-Fmln $\psi_{\underline{\ell}}$, $\psi'_{\underline{\ell}}$ $(\underline{\ell} \in \mathbb{N}^m)$ so dass für jede Primzahl $p > M$ gilt:

$$P_{\varphi(\mathbb{Q}_p)}(\underline{Z}) = \frac{\sum_{\underline{\ell}\in I} \left(\# \varphi_{\underline{\ell}}(\mathbb{F}_p) - \# \varphi'_{\underline{\ell}}(\mathbb{F}_p)\right)\cdot \underline{Z}^{\underline{\ell}}}{h(\underline{Z}, p)}$$

Bem: Für jedes feste p habe auch ein Rationalitätsresultat. Daraus folgt 3.4.1. auch ohne die Bed. $p > M$.

Bew von 1.8.9 für große p: Geg: $f_i \in \mathbb{Z}[\underline{X}]$ $\qquad \mathbb{Z}_p^n \longrightarrow (\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)^n$

- $N_r := \# V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \# V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p) = \underbrace{\frac{\mu(X_r)}{\mu((p^r\mathbb{Z}_p)^n)}}_{= p^{-rn}}$

  für $X_r = \{\underline{x}\in\mathbb{Z}_p^n \mid \underbrace{f_i(\underline{x}) \in p^r\mathbb{Z}_p}_{\iff v(f_i(\underline{x}))\geq r} \ \forall i\}$

  $X = \{(\underline{x}, r) \mid v(f_i(\underline{x})) \geq r \ \forall i\}$
- $P_{\underline{f},p}(Z) = \sum_{r\geq 0} N_r Z^r = \sum_{r\geq 0} \mu(X_r)\, \underbrace{p^{rn}\cdot Z^r}_{(p^n\cdot Z)^r} = P_X(p^n Z)$
- Das ist rational und von der gewünschten Form nach 3.4.1 $\square$

Lemma 3.4.3: Ist $P \in \mathbb{C}[[\underline{Y}, \underline{Z}]]$ eine rat. Fkt (d.h. $P\in\mathbb{C}(\underline{Y},\underline{Z})$) und ist $\underline{a}\in\mathbb{C}^n$ so, dass P absolut konvergiert, wenn man $\underline{a}$ für $\underline{Y}$ einsetzt (so dass man eine Pot-Reihe $P(\underline{a},\underline{Z})\in\mathbb{C}[[\underline{Z}]]$ erhält), so ist auch $P(\underline{a},\underline{Z})$ rational.

Bew:
- Wegen absoluter Konvergenz habe auch Konvergenz von $P(a_1, Y_2, \dots Y_n, \underline{Z})$, etc; kann also eine Var nach der anderen einsetzen. Es reicht also, das Lemma für $\underline{Y} = Y$ zu zeigen.
- P ist rational, d.h. $P = g/h$, für $g, h \in \mathbb{C}[Y, \underline{Z}]$ teilerfremd. D.h. $P\cdot h = g$
- $\Rightarrow P(a,\underline{Z})\cdot h(a,\underline{Z}) = g(a,\underline{Z})$
- Bleibt z.z.: $h(a,\underline{Z})$ ist nicht das Nullpolynom. Sonst: $g(a,\underline{Z})$ ist auch das Nullpoly.
- $h(a,\underline{Z}) \underset{\text{in } \mathbb{C}[\underline{Z}]}{=} 0 \iff Y-a \underset{\text{in } \mathbb{C}[Y,\underline{Z}]}{\mid} h$. Analog für g. Also: $Y-a$ teilt g und h ↯ zu teilerfremd. $\square$

Bew. 3.4.2: Sei also $\varphi(\underline{x}, \underline{y})$ gegeben. Arbeite zunächst in $HEN_{0,0}$.

- $RV^{\times} = \overline{VF}^{\times} \times \Gamma$
- Sei $K \models HEN_{0,0}$ und $X = \varphi(K)$
- Nach Satz 3.1.2 existiert $\emptyset$-definierbares $f: K^n \to RV^N$, so dass gilt:
  - Jede Faser $f^{-1}(\underline{\xi})$ ist ein kQ.
  - $X_{\underline{r}} := \varphi(K, \underline{r})$ ist eine Vereinigung von Fasern von f $\forall \underline{r} \in \Gamma^m$

  .... uniform für alle $K \models HEN_{0,0}$
- „Verbessere" f zu $\tilde{f}: K^n \to RV^N \times \Gamma_{\infty}$, $\underline{x} \longmapsto (f(\underline{x}), g(f(\underline{x})))$, wobei $g(\underline{\xi})$ wie in Satz 3.2.6 die Summe der Radien des kQ $f^{-1}(\underline{\xi})$ ist.
- Setze $Y := \{(\tilde{f}(\underline{x}), \underline{r}) \in RV^N \times \Gamma \times \Gamma^m \mid (\underline{x}, \underline{r}) \in X\}$
  (Also: $X_{\underline{r}} = \tilde{f}^{-1}(Y_r)$, für $Y_r = \{(\underline{\xi}, \lambda) \mid (\underline{\xi}, \lambda, \underline{r}) \in Y\}$)
- Da all dies uniform für alle $K \models HEN_{0,0}$ geht, geht es auch in $K = \mathbb{Q}_p$, für $p \gg 0$. Insbesondere habe (für große p)

(*) $$\mu(X_{\underline{r}}) = \sum_{(\underline{\xi}, \lambda) \in Y_r} p^{-\lambda - n} \qquad \text{(nach 3.2.6)}$$

$$\overline{K}^N \times \Gamma^{N+1+m}$$
$$\cup$$
- Zurück in $K \models HEN_{0,0}$: Y lässt sich schreiben als endl. disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $U_i \times W_i$, für $U_i \subset \overline{K}^N$ L_{Ring}-def'bar und $W_i \subset \Gamma^{N+1+m}$ L_{oag}-def'bar (Benutze Kor 2.5.6; vgl Blatt 10, Aufg. 1). ← uniform für alle $K \models HEN_{0,0}$
- Ab jetzt wieder $K = \mathbb{Q}_p$, p hinreichend groß
- $(*) \Rightarrow \mu(X_{\underline{r}}) = \sum_i \sum_{\substack{(\underline{\xi}, \lambda, \underline{r}) \in U_i \times W_i \\ (\underline{u}, \underline{w}) \in \overline{K}^N \times \Gamma^N}} p^{-\lambda - n} = \sum_i \underbrace{\sum_{\underline{u} \in U_i} \sum_{(\underline{w}, \lambda, \underline{r}) \in W_i} p^{-\lambda - n}}_{\# U_i \cdot \underbrace{\sum_{(\underline{w}, \lambda, \underline{r}) \in W_i} p^{-\lambda - n}}_{(\square_i)}}$

• $P_X(\underline{z}) = \sum_{\underline{r}\in\mathbb{N}^n} \mu(X_{\underline{r}})\cdot \underline{z}^{\underline{r}} = \sum_i \# U_i \cdot \sum_{(\underline{w},\lambda,\underline{r})\in W_i} p^{-\lambda-n}\cdot \underline{z}^{\underline{r}}$

• o.E.: $W_i \subset \underbrace{\mathbb{N}^N}_{\text{Sonst: scheide „negative Teile" ab und und multipliziere die entsprechenden Koord mit } -1.} \times \mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{N}^m}_{\text{klar}}$

• Ändere die Summe in eine, die über eine TM von $\mathbb{N}^N \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^r$ läuft:

• Für festes $\underline{r}$ existiert $\min\{\lambda \mid \exists\, \underline{w} : (\underline{w},\lambda,\underline{r}) \in W_i\} =: h(\underline{r})$ (sonst wäre $(\square_i) = \infty$ und damit $\mu(X_r) = \infty$).

$\tilde{W}_i$ = Proj. von W_i auf $\mathbb{N}^m$ Def.bare Fkt $\tilde{W}_i \to \mathbb{Z}$

defbar = L_{Pres}-defbar

• Aus 3.3.2 folgt: Ex. $\tilde{W}_i = A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_\ell$, A_j defbar, so dass $h|_{A_j}$ linear mit rat. Koeff. ist.

• Nach Zerlegung von W_i o.E. h linear auf ganz $\tilde{W}_i$

• Wähle $h' : \tilde{W}_i \to \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-linear mit $h'(\underline{r}) \leq h(\underline{r})$ $\forall\, \underline{r}$

• $W_i' := \{(\underline{w}, \lambda - h'(\underline{r}), \underline{r}) \mid (\underline{w},\lambda,\underline{r}) \in W_i\} \subset \mathbb{N}^N \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^m$

• $$\sum_{(\underline{w},\lambda,\underline{r})\in W_i} p^{-\lambda-n}\cdot \underline{z}^{\underline{r}} = \sum_{(\underline{w},\lambda',\underline{r})\in W_i'} p^{-\lambda'+h'(\underline{r})-n}\cdot \underline{z}^{\underline{r}}$$

• $h'(\underline{r}) = \sum_j a_j r_j + b$

$$= p^{b-n} \sum_{(\underline{w},\lambda',\underline{r})\in W_i'} p^{-\lambda'} \cdot \prod_j \left(p^{a_j}\cdot z_j\right)^{r_j}$$

• Nach 3.3.5 ist $P_{W_i'}(\underline{Y}, Y', \underline{Y}'')$ rational

$\underline{Y}$: N-Tupel, $\underline{Y}''$: m-Tupel.

$$P_{W_i'}(\underline{Y}, Y', \underline{Y}'') = \sum_{(\underline{w},\lambda',\underline{r})\in W_i'} \underline{Y}^{\underline{w}} \cdot (Y')^{\lambda'} \cdot (\underline{Y}'')^{\underline{r}}$$

$$= p^{b-n} \cdot P_{W_i'}\big(\underbrace{1,\dots,1}_{N}, p^{-1}, p^{a_1} z_1, \dots, p^{a_m} z_m\big)$$

Dies ist eine rat. Fkt nach Lemma 3.6.3, also

$$= \frac{g_i(z,p)}{h_i(z,p)}, \text{ für } g,h \in \mathbb{Z}[z,p]$$

Also: $P_X(z) = \sum_i \#U_i \cdot \frac{g_i(z,p)}{h_i(z,p)}$. Das hat die gewünschte Form. □

Ausblick

- **Anwendungen von bew. Kp**
  - In der Zahlentheorie:
    - $f \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]^0$. • Ist „$f=0$" in $\mathbb{Z}^n$ lösbar?
    - „$f=0$" in $\mathbb{Q}^n$ lösbar

      In Spezialfällen habe ⇑ → ⇓

      algorithmisch entscheidbar — [„$f=0$" in K^n lösbar für jede Vervollst K von $\mathbb{Q}$.

    Nicht-arch

    - Vervollst. von $\mathbb{Q}$ ≙ Nicht-arch Bewertungen auf $\mathbb{Q}$/Äquivalenz ≙ Primzahlen

  Analogie zu algebraischen Kurven:

    - $\mathbb{C}(X)$ statt $\mathbb{Q}$:

      Vervollst ..... ≙ Bew. auf $\mathbb{C}(X)$, die trivial auf $\mathbb{C}$ sind ≙ irred. Poly $X-a$ $(a \in \mathbb{C})$ $\cup \{\infty\}$ ⊇ $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

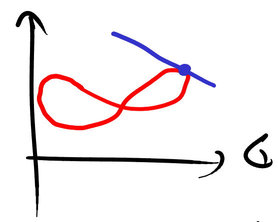
      Grad-Bewertung ⟵ ∞

      $\mathbb{C}((X))$ ⟵ 0

      ↑ „Potenzreihen auf unendl. kleiner Umgebung von 0"

- Anwend. in alg. Geometrie:
  - In $\mathbb{C}$ habe „kleine Umgebung eines Punktes"; für abstrakte Kp. K arbeite statt dessen mit formalen Pot-Reihen: In $K((t))$ verhält sich t wie ein unendlich kleines Element.

$\mathbb{C}$



- **Modelltheorie:**
  - Geometrie in $\mathrm{HEN}_{0,0}$ (Dim; def'bare Fkt sind fast überall C^k, ...)
  - In ACVF:
    - Fast-IE
    - $\bar{K} \models \mathrm{ACF}$, d.h. stabil, $\Gamma \models \mathrm{DOAG}$, d.h. o-minimal