Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 14

Optionale Abgabe von Lösungen bis Mittwoch, den 01.02.2023, 10.15 Uhr in den Kästen. Abgaben werden korrigiert, und es können so noch Bonuspunkte erzielt werden.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 14.1 (+4 Punkte)

Seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Funktionen, und für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & f(t) & 1 \\ g(t) & t^2 - 4 & g(t)h(t) \\ 1 & 0 & h(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Entscheiden Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Matrix A_t invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie, in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, die komplementäre Matrix $\tilde{A}_t$ zu A_t.

(c) Bestimmen Sie, für alle gemäß (a) zulässigen Parameter $t \in \mathbb{R}$, die inverse Matrix A_t^{-1}.

Aufgabe 14.2 (+4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})\,.$$

und $\alpha\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, v \mapsto vA$, die durch Multiplikation mit A definierte lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α bzw. A, und lesen Sie die Eigenwerte von α ab. Was können Sie daraufhin über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?

(b) Berechnen Sie die Eigenräume von α. Was können Sie nun über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?

(c) Geben Sie, wenn möglich, eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ an, die A diagonalisiert; d. h., $T^{-1}AT$ soll eine Diagonalmatrix werden.

Aufgabe 14.3 (+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{F}_5^3$ der 3-dimensionale Standardvektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen, und $\mathfrak{E}$ die zugehörige Standardbasis. Sei $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_5}(V)$ mit Koordinatenmatrix

$$[\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5).$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von α und Basen für die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist α diagonalisierbar? Geben Sie, wenn möglich eine Basis $\mathfrak{F}$ für V an, so daß die Koordinatenmatrix $[\alpha]_{\mathfrak{F}}$ diagonal ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 14.4 (+4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie, jeweils mit geeigneter Begründung:

(a) Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, deren einziger Eigenwert 0 ist, ist bereits die Nullabbildung.

(b) Ein Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V ist surjektiv genau dann, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

(c) Sind $\varphi, \psi\colon V \to V$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, und ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $\varphi\psi\colon V \to V$, so ist λ auch ein Eigenwert von $\psi\varphi\colon V \to V$.

Technischer Hinweis. Dies ist das angekündigte Bonusblatt zu der Veranstaltung. Durch die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Blatt können zusätzliche Punkte erworben werden. Die Meßlatte für die Prüfungszulassung ist davon unberührt und beträgt wie auf dem vorherigen Blatt vermerkt $13 \cdot 16 = 208$ Gesamtpunkte.

Sie erhalten nächste Woche ggf. noch ein weiteres Übungsblatt 15, welches nicht mehr korrigiert wird, aber Ihnen unverbindlich die Möglichkeit bietet, die Inhalte der letzten zwei Vorlesungen zu vertiefen und einzuüben.