Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 13

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 13.1, 13.2, 13.3 und 13.4 bis
Mittwoch, den 25.01.2023, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$, die wie folgt konkret gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A)$ mit Hilfe der Leibniz-Formel. Fertigen Sie dazu zunächst eine Tabelle an, in der alle Permutationen $\sigma \in \mathrm{Sym}(4)$ mit ihrem Signum aufgeführt sind, die einen von Null verschiedenen Beitrag $\prod_{i=1}^{4} a_{i,i\sigma}$ liefern.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Laplace-Entwicklung die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_{13}),$$

wobei $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ den Körper mit 13 Elementen bezeichne. Entscheiden Sie anschließend jeweils, ob die Matrix über dem angegebenen Grundkörper invertierbar ist.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $D \in \mathrm{Mat}_n(K)$ für einen Körper K. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = (\det B)(\det D),$$

wobei auf der linken Seite die Determinante der als „Blockmatrix" geschriebenen quadratischen Matrix mit $m + n$ Zeilen und Spalten über K gemeint ist.

Tipp: Verwenden Sie die Leibniz-Formel und überlegen Sie sich, welche Summanden überhaupt einen von Null verschiedenen Beitrag liefern können.

Bitte wenden!

Bei der nächsten Aufgabe handelt es sich um eine Klausuraufgabe aus dem letzten SoSe. Sie erhalten bis zu 4 Punkte für die Bearbeitung der Aufgabenteile (a)–(d); die letzten beiden Aufgabenteile können Sie bearbeiten, sie fließen aber nicht in die Bewertung ein.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Sei $\alpha\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ der lineare Endomorphismus des Standaradvektorraums $\mathbb{Q}^3$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

bzgl. der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$, bestehend aus $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

(a) Verifizieren Sie mittels geeigneter Zeilenumformungen, daß A (und damit α) den vollen Rang 3 hat, und berechnen Sie dabei parallel $A^{-1} = [\alpha^{-1}]_{\mathfrak{E}}$.

(b) Bestimmen Sie den Untervektorraum

$$U = \{v \in \mathbb{Q}^3 \mid v\alpha = 5v\},$$

indem Sie eine Basis für U berechnen.

(c) Verifizieren Sie, daß die Abbildung $\beta\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $v \mapsto (v\alpha)\alpha + v$ linear ist und geben Sie die zugehörige Koordinatenmatrix $B = [\beta]_{\mathfrak{E}}$ an.

(d) Geben Sie $W = \mathrm{Kern}(\beta)$, den Kern der linearen Abbildung β aus (c), an, indem Sie eine Basis für W bestimmen.

Die verbleibenden Aufgabenteile (e) und (f) brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

(e) Zeigen Sie, daß der Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ sich als direkte Summe $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$ zerlegt, wobei U wie in (b) und W wie in (d) gegeben sind.

(f) Gemäß (e) ergänzen sich die von Ihnen gefundenen Basen für U und W zu einer Basis für $\mathbb{Q}^3$. Geben Sie diese Basis noch einmal explizit als geordnete Basis $\mathfrak{B}$ an und berechnen Sie $A' = [\alpha]_{\mathfrak{B}}$ sowie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ mit $S^{-1}AS = A'$.

Bemerkung. Daß es sich lohnt, für die Beschreibung von α die Untervektorräume U und W zu betrachten, ergibt sich, wie wir in der Vorlesung sehen werden, in natürlicher Weise aus der Betrachtung des sogenannten charakteristischen Polynoms von α.

Technischer Hinweis. Dies ist das letzte reguläre Übungsblatt zu der Veranstaltung. Sie erhalten nächste Woche ein weiteres Übungsblatt 14, welches wie gewohnt korrigiert wird und von Ihnen abgeholt werden kann (siehe Webseite); eine Besprechung des Extrablattes in den Übungsgruppen ist zeitlich nicht möglich. Durch die Bearbeitung der Aufgaben auf Blatt 14 können ggf. noch zusätzliche Punkte erworben werden. Die Meßlatte 40% bzw. 32% für die Prüfungszulassung bezieht sich auf die Gesamtpunktzahl $13 \cdot 16 = 208$.