Lineare Algebra I – Blatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 11.1, 11.2, 11.3 und 11.4 bis Mittwoch, den 11.01.2023, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen U, V, W über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Die Hintereinanderausführung $\varphi\psi\colon U \to W$ ist eine lineare Abbildung.

(b) Der Kern $\mathrm{Kern}(\psi) = \{v \in V \mid v\psi = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V, und das Bild $\mathrm{Bild}(\psi) = \{v\psi \mid v \in V\}$ ist ein Untervektorraum von W.

(c) Aus $V = \langle S \rangle$ für eine Menge $S \subseteq V$ folgt $\mathrm{Bild}(\psi) = \langle \{s\psi \mid s \in S\} \rangle$, und es gilt $\dim \mathrm{Bild}(\psi) \le \dim V$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

(a) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + 1)$ zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$;

(ii) $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x, y) \mapsto (y^2, x)$ von dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ in sich;

(iii) $\varphi\colon \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ von dem Folgenraum $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{F}_2$ in sich.

(b) Geben Sie die Koordinatenmatrix $T = [\vartheta]_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}}$ für die lineare Abbildung

$$\vartheta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x, z + x)$$

bezüglich der Standardbasen $\mathfrak{E}$ für $\mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{F}$ für $\mathbb{R}^4$ an.
Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\vartheta)$ und $\mathrm{Bild}(\vartheta)$, indem Sie jeweils eine Basis berechnen.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Betrachte die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ bzw. $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$. Weiter seien $\mathfrak{B} = (v_1, v_2)$ und $\mathfrak{C} = (w_1, w_2, w_3)$ für

$$\begin{aligned} &v_1 = e_1 - e_2, && v_2 = -2e_1 + e_2, && \\ &w_1 = f_1 - f_3, && w_2 = f_2 + f_3, && w_3 = f_3. \end{aligned}$$

(a) Überprüfen Sie, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ alternative Basen für V und W bilden.

(b) Sei $\vartheta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $v_1\vartheta = w_1$ und $v_2\vartheta = w_2$. Bestimmen Sie $[\vartheta]_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ und $[\vartheta]_{\mathfrak{E},\mathfrak{F}}$, die Koordinatenmatrizen von ϑ bzgl. der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bzw. bzgl. der Basen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$.

(c) Finden Sie eine lineare Abbildung $\psi\colon W \to V$ mit $\vartheta\psi = \mathrm{id}_V$ und geben Sie die entsprechenden Koordinatenmatrizen $[\psi]_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}$ und $[\psi]_{\mathfrak{F},\mathfrak{E}}$ an.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $V = K^n$ der Standardvektorraum über einem Körper K, ausgestattet mit der sogenannten Standardbilinearform

$$K^n \times K^n \to K, \quad \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Sei U ein Untervektorraum von V, und sei

$$U^\perp =_{\text{def}} \{w \in V \mid \forall u \in U : u \cdot w = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie: $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) Der Untervektorraum U sei k-dimensional, mit einer Basis, die bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ von V die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_{2,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{k,n}(K)$$

mit gewissen Einträgen $a_{ij} \in K$ habe. Zeigen Sie: Dann hat $U^\perp$ die Dimension $n - k$ und besitzt genauer eine Basis, die die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} -a_{1,k+1} & -a_{2,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{1,k+2} & -a_{2,k+2} & \cdots & -a_{k,k+2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & -a_{k,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n-k,n}(K)$$

bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{E}$ hat.

Anleitung. Überprüfen Sie zunächst, dass $U^\perp$ einen Untervektoraum von V bildet. Weisen Sie sodann nach, daß die angegebenen Zeilenvektoren jedenfalls in $U^\perp$ liegen, und erklären Sie anschließend, wieso sie bereits eine Basis für $U^\perp$ bilden.

Weihnachtsrätsel. Aus einem mathematischen Seminar im hohen Norden (Kiel) ist durch viele Generationen hindurch folgendes Rätsel überliefert worden. Viel Spass dabei!

Hier ist ein Weihnachtsrätsel, mit dem sich die ganze Familie beschäftigen kann, wenn über die Feiertage mal Langeweile aufkommen sollte.
Es geht darum, herauszufinden, in welchem Stall das Christkind geboren wurde. Fünf Ställe liegen in einer Reihe entlang der Straße. Jeder von diesen trägt eine andere Farbe. In jedem Stall wohnt ein anderer Hirte aus einer anderen Landschaft Palästinas. Jeder Stallhirte bevorzugt ein bestimmtes Getränk, benutzt ein bestimmtes Gewürz und hält ein bestimmtes Haustier. Keiner der Hirten trinkt das gleiche Getränk, würzt mit demselben Gewürz oder hält das gleiche Tier wie ein anderer Hirte. Himmlische Botschafter haben die folgenden Hinweise vergeben:

1. Das Christkind ist in dem Stall geboren, in dem ein Esel gehalten wird.
2. Der galiläische Hirte lebt in einem roten Stall.
3. Der samaritische Hirte hält einen Hund.
4. Der judäische Hirte trinkt gerne Tee.
5. Der grüne Stall liegt, von der Straße gesehen, links neben dem weißen Stall.
6. Der Hirte des grünen Stalles trinkt Fruchtnektar.
7. Der Hirte, der mit Nelken würzt, hält einen Vogel.
8. Der Hirte, der im mittleren Stall wohnt, trinkt Milch.
9. Der Hirte des gelben Stalles würzt mit Pfeffer.
10. Der ituräische Hirte wohnt im ersten Stall von links.
11. Der Hirte, der mit Koriander würzt, wohnt neben dem, der eine Katze hält.
12. Der Hirte, der ein Kamel hält, wohnt neben dem, der mit Pfeffer würzt.
13. Der mit Zimt würzt trinkt gerne Wein.
14. Der ituräische Hirte wohnt neben dem blauen Stall.
15. Der peräische Hirte würzt mit Safran.
16. Der mit Koriander würzt hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Also, in welchem Stall wurde das Christkind geboren?

Frohe Weihnachten und kommen Sie gut ins neue Jahr!