Lineare Algebra I – Blatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 10.1, 10.2, 10.3 und 10.4 bis Mittwoch, den 21.12.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie, für $m = 1973$, in dem Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein multiplikativ inverses Element zu $\overline{410} = 410 + m\mathbb{Z}$, indem Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus anwenden: Berechnen Sie zunächst den relevanten größten gemeinsamen Teiler und dann geeignete Bézout-Koeffizienten.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Sei $G = (G, \cdot)$ eine *Gruppe*. Eine *Untergruppe* $H = (H, \cdot)$ von G besteht aus einer Teilmenge $H \subseteq G$, die bezüglich der eingeschränkten Multiplikation selbst eine Gruppe bildet.

(a) Sei $H \subseteq G$. Beweisen Sie das folgende Untergruppenkriterium: H bildet genau dann eine Untergruppe von G, wenn gilt: $H \neq \varnothing$ und $\forall x, y \in H : x^{-1}y \in H$.

(b) Zeigen Sie: Sind $H, K \subseteq G$ zwei Untergruppen von G, so ist auch deren Schnitt $H \cap K$ eine Untergruppe von G.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G, wie in Aufgabe 10.2 definiert.

(a) Zeigen Sie, daß die auf G durch

$$x \equiv_H y \quad \longleftrightarrow_{\text{def}} \quad x^{-1}y \in H \qquad (x, y \in G)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation darstellt. Zeigen Sie weiter, daß die Äquivalenzklasse von $g \in G$ bzgl. $\equiv_H$ gleich $gH = \{gh \mid h \in H\}$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mu_g \colon H \to gH$, $h \mapsto gh$ für jedes $g \in G$ eine Bijektion darstellt.

(c) Folgern Sie für $|G| < \infty$ den sogenannten Satz von Lagrange: $|H|$ teilt $|G|$.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, und sei $f \in K[X]$ mit $\operatorname{grad}(f) = 2$ oder $\operatorname{grad}(f) = 3$. Zeigen Sie, daß f genau dann irreduzibel in $K[X]$ ist, wenn f keine Nullstelle in K besitzt.

(b) Bestimmen Sie konkret ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad 4, das keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt und dennoch zerlegbar, also nicht irreduzibel, in $\mathbb{R}[X]$ ist.

Bitte wenden!

Die nachfolgenden Aufgaben brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

Aufgabe 10.5

(a) Geben Sie jeweils eine Zerlegung des Polynoms

$$f = X^3 - X^2 - 7X + 7 \in K[X]$$

in irreduzible Faktoren über den Körpern $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_3$ an.

Hinweis. Verwenden Sie das in Aufgabe 10.4 bereitgestellte Irreduzibilitätskriterium.

(b) Bestimmen Sie explizit ein Polynom $f \in \mathbb{F}_5[X] \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $a \in \mathbb{F}_5$ das Bild $f(a)$ unter dem zugeordneten Einsetzungshomomorphismus gleich 0 ist.

(c) Die Menge $U = \{f \in \mathbb{F}_5[X] \mid \forall a \in \mathbb{F}_5 : f(a) = 0\}$ bildet einen Untervektorraum des $\mathbb{F}_5$-Vektorraums $V = \mathbb{F}_5[X]$. Bestimmen Sie eine Basis für U.

Aufgabe 10.6

(a) Fertigen Sie explizit eine Multiplikationstafel für die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ des Restklassenringes $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ an.

(b) In der Vorlesung wurde die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ des Restklassenringes $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ besprochen. Gilt $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$? Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$.

Hinweis. Mit Hilfe des in Aufgabe 10.3(c) angegebenen Satzes von Lagrange können Sie bereits die in Frage kommenden Teilmengen hilfreich einschränken.

Aufgabe 10.7

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H, K. Formulieren und beweisen Sie, in Analogie zu Aufgabe 5.2, ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür, daß $H \cup K$ eine Untergruppe von G bildet.