Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zweite Klausur (Nachdruck) Lineare Algebra I

Wintersemester 2022/23
31.03.2023

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Es sind außer Schreibgerät keine weiteren Hilfsmittel gestattet.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen acht Aufgaben bearbeiten.
- Bearbeiten Sie Aufgaben jeweils direkt unterhalb des Aufgabentextes und auf der bzw. den nachfolgenden Leerseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Leerblätter. Beschriften Sie diese jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der relevanten Aufgabennummer. Lassen Sie hinreichend freien Rand.
- Geben Sie am Ende das Aufgabenheft und ggf. zusätzliche Lösungsblätter nach Aufgabenreihenfolge geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ der Vektor-Gleichung

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie die zugehörige Koeffizientenmatrix bilden, diese auf reduzierte Zeilenstufenform bringen und daraus die Lösungen ablesen.

(b) In einem Ring R gilt für die Addition $+$ bekanntlich das Assoziativgesetz:

$$\forall x, y, z \in R: \ (x + y) + z = x + (y + z). \qquad (*)$$

Leiten Sie daraus die folgende Rechenregel ab, wobei Sie bei jedem Schritt genau kenntlich machen, wie $(*)$ anzuwenden ist:

$$\forall a, b, c, d \in R: \ (a + b) + (c + d) = a + ((b + c) + d).$$

(c) Berechnen Sie mittels wiederholter Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

wobei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ den Körper mit 5 Elementen bezeichne.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Sei K ein Körper, und sei V ein K-Vektorraum.

(a) Sei W ein weiterer K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Definitionen für den Kern und das Bild von φ an.

(b) Seien U, W Untervektorräume von V. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen V definitionsgemäß die direkte Summe von U und W ist, also $V = U \oplus W$ gilt.

(c) Ein Endomorphismus $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ habe die Eigenschaft $\alpha^2 = \alpha$. Beweisen Sie, daß dann $V = \operatorname{Kern}(\alpha) \oplus \operatorname{Bild}(\alpha)$ gilt.

(d) Betrachten Sie nun konkret den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, mit der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Nennen Sie explizit ein Beispiel für einen Endomorphismus $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha^2 = \alpha$ und $\operatorname{Rang}(\alpha) = 2$, indem Sie die zugehörige Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}}$ angeben.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(59, 142)$ der Zahlen 59 und 142 mittels des Euklidischen Algorithmus wurde folgende Rechnung begonnen:

$$\begin{aligned} 142 - 2 \cdot 59 &= 24 \\ 59 - 2 \cdot 24 &= 11 \\ &\cdots \end{aligned}$$

(a) Vervollständigen Sie die Rechnung und bestimmen Sie so $\mathrm{ggT}(59, 142)$.

(b) Bestimmen Sie mittels der Erweiterung des Euklidischen Algorithmus eine explizite Darstellung von $\mathrm{ggT}(59, 142)$ als ganzzahlige Linearkombination von 59 und 142.

(c) Ist 59 modulo 142 invertierbar, d.h., ist die Restklasse $\overline{59}$ eine Einheit in dem Restklassenring $\mathbb{Z}/142\mathbb{Z}$? – Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie ggf. das multiplikativ inverse Element zu $\overline{59}$ in $\mathbb{Z}/142\mathbb{Z}$.

(d) Hat die Kongruenzengleichung

$$59x + 37 \equiv_{71} 0$$

wenigstens eine ganzzahlige Lösung x in $\mathbb{Z}$? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (*18 Punkte*)

Sei K ein Körper, und sei V ein K-Vektorraum. Sei $\alpha\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

(a) Geben Sie die Definitionen für die Begriffe „Eigenvektor“, „Eigenwert“ sowie „Eigenraum“, in Hinblick auf α, an.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Eigenvektoren für α zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Zeigen Sie per Induktion nach n, daß $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, indem Sie zu geeigneten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n \in K$ die Terme

$$\lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \qquad \text{und} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right) \alpha$$

betrachten, geeignet umformen und vergleichen.

(c) Der Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ habe die Eigenschaft $\alpha^3 = \alpha$. Zeigen Sie, daß α höchstens Eigenwerte gleich 0, 1 oder -1 besitzen kann.

(d) Betrachten Sie nun konkret den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über $K = \mathbb{R}$, mit der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Die Koordinatenmatrix von α bzgl. $\mathfrak{E}$ sei

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Basis für V, die vollständig aus Eigenvektoren für α besteht?

Aufgabe 5 (*20 Punkte*)
Sei K ein Körper, und sei V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{E} = (e_1, \ldots, e_4)$. Sei $\alpha\colon V \to V$ der Endomorphismus mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(K).$$

(a) Geben Sie die Definition für den Rang einer linearen Abbildung $\varphi\colon U \to W$ zwischen K-Vektorräumen an.

(b) Geben Sie, in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$, explizit Basen für $\mathrm{Kern}(\alpha^k)$ und für $\mathrm{Bild}(\alpha^k)$ an; bestimmen Sie zudem den Rang von $\alpha^k \in \mathrm{End}(V)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie $\mathrm{Mat}_4(K)$ wie üblich als K-Vektorraum. Weisen Sie mit Hilfe des Untervektorraumkriteriums nach, daß

$$\mathcal{U} = \{B \in \mathrm{Mat}_4(K) \mid AB = BA\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_4(K)$ ist.

(d) Zeigen Sie, daß der in (c) betrachtete Untervektorraum $\mathcal{U}$ weder gleich $\{0\}$ noch gleich $\mathrm{Mat}_4(K)$ ist.

(e) Sei $\beta\colon V \to V$ der lineare Endomorphismus mit Koordinatenmatrix

$$B = [\beta]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(K).$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ für V mit den Eigenschaften

$$v_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0) \qquad \text{und} \qquad [\beta]_{\mathfrak{B}} = A,$$

sowie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(K)$ mit der Eigenschaft $TBT^{-1} = A$.

Aufgabe 6 (*20 Punkte*)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Geben Sie die drei definierenden Bedingungen für ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$ sowie die Definition der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ an.

(b) Geben Sie die Definition einer Orthonormalbasis für V bezüglich eines Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ an.

(c) Sei nun $V=\mathbb{R}^3$, der Standardvektorraum, und

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R},\quad \langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3.$$

Überprüfen Sie, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt auf V definiert.

(d) Bestimmen Sie mithilfe des Gram–Schmidt-Verfahrens für die Vektoren

$$v_1=(1,1,1),\quad v_2=(1,-1,2)$$

eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $U=\langle v_1,v_2\rangle$ im Vektorraum $V=\mathbb{R}^3$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt aus (c).

(e) Sei nun $V=\mathbb{R}^2$ und $\alpha\colon V\to V$ linear mit Koordinatenmatrix

$$[\alpha]_{\mathfrak{E}}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathfrak{D}=(v_1,v_2)$ für V, die aus Eigenvektoren von α besteht, und geben Sie $[\alpha]_{\mathfrak{D}}$ an. Überprüfen Sie, ob v_1,v_2 bezüglich des Standardskalarproduktes

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R},\quad \langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1+x_2y_2$$

senkrecht zueinander stehen.

Aufgabe 7 (*15 Punkte*)

Betrachten Sie $\mathcal{V} = \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ als 9-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum sowie die Permutationsmatrizen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Belegen Sie, daß die sechs Matrizen $P_1, P_2, \dots, P_6$ als Vektoren in $\mathcal{V}$ *nicht* linear unabhängig sind, beispielsweise indem Sie zwei verschiedene Linearkombination dieser Matrizen mit Koeffizienten in $\{0, 1\}$ angeben, die beide die gleiche Matrix ergeben.

(b) Bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle

$$\mathcal{U} = \langle \{P_1, P_2, \dots, P_6\} \rangle \subseteq \mathcal{V}$$

sowie eine geordnete Basis $\mathfrak{B}$ für den Untervektorraum $\mathcal{U}$, die sich aus geeigneten Permutationsmatrizen zusammensetzt.

(c) Transponieren liefert erkennbarerweise eine lineare Abbildung $\vartheta\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $A \mapsto A^{\mathrm{tr}}$. Berechnen Sie die Koordinatenmatrix $[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ von ϑ bzgl. der von Ihnen in (b) bestimmten Basis $\mathfrak{B}$.

(d) Entscheiden Sie, ob der in (c) betrachtete Endomorphismus $\vartheta \in \mathrm{End}(\mathcal{U})$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie ggf. eine Basis $\mathfrak{C}$ für $\mathcal{U}$, so daß $[\vartheta]_{\mathfrak{C}}$ Diagonalgestalt besitzt.

Aufgabe 8 (*15 Punkte*)

Betrachten Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die $m \times m$-Matrix

$$B_{m,n} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q})$$

mit Diagonaleinträgen n und Einträgen 1 an allen anderen Positionen.

(a) Geben Sie zunächst (ohne Beweis) die Leibniz-Formel für die Berechnung der Determinante einer allgemeinen $m \times m$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q})$ an.
Nennen Sie in diesem Zusammenhang auch die Definition einer Permutation. Weitere darüber hinaus einfließende Konzepte sollten Sie mit dem jeweiligen Fachbegriff kurz benennen; Sie brauchen diese aber nicht im Detail zu definieren.

(b) Berechnen Sie nun konkret $\det(B_{3,3})$, indem Sie die Determinante direkt nach der ersten Spalte entwickeln und dann geeignet weiterrechnen.

(c) Leiten Sie alsdann allgemein, für $m, n \in \mathbb{N}$, die Rekursionsformel

$$\det(B_{m,n}) = n \cdot \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{m-1} \cdot \det(B_{m-1,n+1})$$

her, indem Sie ausnutzen, wie sich die Determinante unter elementaren Zeilenumformungen verhält: Transformieren Sie die Matrix $B_{m,n}$ geeignet in eine Matrix $B'_{m,n} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{Q})$, deren erste Spalte nahezu nur Nulleinträge besitzt, so daß die Berechnung von $\det(B'_{m,n})$ auf die Berechnung von $\det(B_{m-1,n+1})$ zurückgeführt werden kann.

(d) Verwenden Sie schließlich die Rekursionsformel in (c), um beispielhaft $\det(B_{5,2})$ ohne großen Rechenaufwand, sondern durch geschicktes Kürzen explizit zu berechnen.