Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch

Erste Klausur (Nachdruck) Lineare Algebra I

Wintersemester 2022/23
16.02.2023

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Es sind außer Schreibgerät keine weiteren Hilfsmittel gestattet.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen acht Aufgaben bearbeiten.
- Bearbeiten Sie Aufgaben jeweils direkt unterhalb des Aufgabentextes und auf der bzw. den nachfolgenden Leerseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Leerblätter. Beschriften Sie diese jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der relevanten Aufgabennummer. Lassen Sie hinreichend freien Rand.
- Geben Sie am Ende das Aufgabenheft und ggf. zusätzliche Lösungsblätter nach Aufgabenreihenfolge geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

(a) Ergänzen Sie alle fehlenden Einträge W, F („wahr“ bzw. „falsch“) in der nachfolgenden Wahrheitstafel, mit Hilfe derer Konsequenzen dreier mathematischer Aussagen α, β, γ überprüft werden sollen.

α	β	γ	$\alpha \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$(\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)$	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$
W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F		F		F	
W	F	W	W			F	
	F	F				F	
W	F		F			F	
F						F	
W	W		F	F		W	
F	W		W	W		F	

(b) Begründen Sie anhand der vollständigen Tafel aus (a), ob die Aussage

$$((\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)) \;\leftrightarrow\; ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma).$$

allgemein für beliebige Aussagen α, β, γ richtig ist oder nicht.

(c) Seien $A, B, C \subseteq M$ Mengen. Geben Sie knapp an, welche Interpretation die Aussage in (b) in Hinblick auf die Mengen

$$(M \setminus A) \cup (M \setminus B) \cup C \quad \text{und} \quad (M \setminus (A \cap B)) \cup C$$

besitzt, indem Sie geeignete Aussagen α, β, γ formulieren und einsetzen.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und sei $M \subseteq V$.

(a) Geben Sie die Definition für die lineare Hülle $\langle M \rangle$ von M in V an.

(b) Beweisen Sie, direkt ohne Verwendung tiefer liegender Sätze, die grundlegende Aussage: Ist $v \in V$ mit $\langle M \setminus \{v\} \rangle \subsetneq \langle M \rangle$, so gilt bereits $v \notin \langle M \setminus \{v\} \rangle$.

(c) Betrachten Sie nun konkret den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^5$. Bestimmen Sie die lineare Hülle $W = \langle w_1, \ldots, w_5 \rangle$ der Vektoren

$$w_1 = (1,1,1,1,1), \quad w_2 = (1,2,1,2,1), \quad w_3 = (0,-1,0,1,0),$$
$$w_4 = (2,0,2,6,2), \quad w_5 = (3,1,3,7,3),$$

indem Sie eine Basis für W berechnen.

(d) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 15 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -7
\end{array}$$

eine Lösung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5$ besitzt, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie auf Ihr Ergebnis aus (c) zurückgreifen.

Aufgabe 3 (*14 Punkte*)
Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen über einem Körper K.

(a) Geben Sie die Definition für $\mathrm{Rang}(\varphi)$, den Rang der linearen Abbildung φ, an.

(b) Geben Sie (ohne Beweis) die Dimensionsformel für die lineare Abbildung φ an, die eine alternative Formel zur Berechnung von $\mathrm{Rang}(\varphi)$ liefert.

(c) Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(\varphi\psi) = \{u \in U \mid u\varphi \in \mathrm{Kern}(\psi)\}$.

(d) Folgern Sie aus (c) mit Hilfe einer Dimensionsformel die Abschätzung

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi\psi)) \leq \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Kern}(\psi)).$$

(e) Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus (b) und (d), um zu beweisen:

$$\mathrm{Rang}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\psi) \leq \mathrm{Rang}(\varphi\psi) + \dim(V).$$

Aufgabe 4 (*16 Punkte*)

Betrachten Sie $V = \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ in der üblichen Weise als $\mathbb{R}$-Algebra, insbesondere als Vektorraum. Sei

$$U = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v}^{\mathrm{tr}} = -\mathbf{v}\} \subseteq V,$$

wobei $\mathbf{v}^{\mathrm{tr}}$ die zu $\mathbf{v}$ transponierte Matrix bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie konkret die Transponierte $\mathbf{b}^{\mathrm{tr}}$ der Matrix

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

(b) Verwenden Sie das Untervektorraumkriterium, um nachzuweisen, daß U einen Untervektorraum von V bildet.

(c) Bestimmen Sie explizit eine Basis für U.

(d) Zeigen Sie, daß V mittels

$$\eta\colon V \to V, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \mathbf{v}^{\mathrm{tr}}$$

surjektiv auf U abgebildet wird, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus (b) und (c) nutzen.

(e) Berechnen Sie, für beliebiges $\mathbf{u} = (u_{ij})_{i,j} \in U$, das charakteristische Polynom $f_{\mathbf{u}} = \mathrm{Charpol}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}[X]$ und zerlegen Sie $f_{\mathbf{u}}$, in Abhängigkeit von $\mathbf{u}$, in ein Produkt von über $\mathbb{R}$ irreduzible Faktoren.

(f) Verwenden Sie Ihre Antwort zu (e), um alle $\mathbf{u} \in U$ zu bestimmen, die in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ invertierbar sind.

(g) Verwenden Sie Ihre Antwort zu (e), um alle $\mathbf{u} \in U$ zu bestimmen, die (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar sind.

Aufgabe 5 (*14 Punkte*)

Betrachten Sie zu $m \in \mathbb{N}$ den Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$.

(a) Begründen Sie: Ist m zusammengesetzt, also $m = ab$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 < a, b < m$, so ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kein Körper.

(b) Geben Sie (ohne Beweis) ein Kriterium an, das sich aus der Teilbarkeitstheorie für $\mathbb{Z}$ ergibt und anhand dessen entschieden werden kann, ob für $x \in \mathbb{Z}$ das zugeordnete Element $\overline{x}$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ invertierbar ist oder nicht.

(c) Bestimmen Sie, für $m = 20$, explizit die Elemente der Einheitengruppe $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ und alsdann die Menge $\{\overline{x}^2 \mid \overline{x} \in G\}$ aller Quadrate in G.

(d) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus und das Kriterium aus (b), um für $m = 1001$ konkret zu entscheiden, ob $\overline{584}$ in $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$ invertierbar ist oder nicht.

Aufgabe 6 (*20 Punkte*)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

(a) Geben Sie (ohne Beweis) an, wie sich der Zeilenrang einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ zum Spaltenrang dieser Matrix verhält.

(b) Geben Sie (ohne Beweis) an, wie sich die Äquivalenz[†] von Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ mit Hilfe einer geeigneten Invariante kennzeichnen läßt. Geben Sie zudem Vertreter für die verschiedenen Äquivalenzklassen in $\mathrm{Mat}_{3,2}(K)$ an.

Betrachten Sie nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -x & -2y \\ -1 & z & x & y+3z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,4}(\mathbb{Q}),$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{Q}$ Parameter darstellen.

(c) Entscheiden und begründen Sie, in Abhängigkeit von (x, y, z), welche der nachfolgenden Matrizen jeweils äquivalent zu A sind.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Entscheiden und begründen Sie, in Abhängigkeit von (x, y, z), ob es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ gibt, dergestalt, daß $A' = SA$ gleich einer der unter (c) genannten Matrizen B_1, B_2, B_3 ist.

(e) Bestimmen Sie für $x \neq 0$, in Abhängigkeit von (x, y, z), Matrizen $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ und $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ dergestalt, daß $A' = SAT$ gleich einer der unter (c) genannten Matrizen B_1, B_2, B_3 ist.

[†] Zur Erinnerung: Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ heißen äquivalent, wenn es $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$ gibt.

Aufgabe 7 (*18 Punkte*)

Es sei $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Körper mit 5 Elementen. Sei $\alpha\colon \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^4$ der lineare Endomorphismus des Standaradvektorraums $\mathbb{F}_5^4$ mit Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_5)$$

bzgl. der Basis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, bestehend aus $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $\dots$, $e_4 = (0,0,0,1)$; also $e_1\alpha = e_4$, $e_2\alpha = 4e_3$ usw.

(a) Verifizieren Sie mittels geeigneter Zeilenumformungen, daß A (und damit α) den vollen Rang 4 hat, und berechnen Sie $A^{-1} = [\alpha^{-1}]_{\mathfrak{E}}$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $f = \mathrm{Charpol}(\alpha) \in \mathbb{F}_5[X]$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von α sowie deren algebraische Vielfachheiten.

(d) Berechnen Sie zu *einem* der gefundenen Eigenwerte den Eigenraum von α, indem Sie eine geeignete Basis bestimmen. Geben Sie die geometrische Vielfachheit des betroffenen Eigenwerts an.

(e) Entscheiden Sie, ob α diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (*16 Punkte*)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und euklidischer Norm $\| \cdot \|$. Weiter seien $U \subsetneqq V$ ein Untervektorraum von V und $v \in V \setminus U$.

(a) Geben Sie an, unter welcher Bedingung definitionsgemäß zwei Vektoren aus V senkrecht zueinander stehen; notieren Sie die Definition des Senkrechtraumes $U^{\perp}$.

(b) Bekanntlich läßt sich in einem euklidischen Vektorraum jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Folgern Sie: Es existiert genau ein $u_0 \in U$ mit der Eigenschaft $v - u_0 \in U^{\perp}$.

(c) Zeigen Sie: Der durch die in (b) beschriebene Bedingung eindeutig bestimmte Vektor $u_0 \in U$ besitzt die zusätzliche Eigenschaft

$$\forall u \in U \setminus \{u_0\} : \|v - u_0\| < \|v - u\|.$$

(d) Sei nun konkret $V = \mathbb{R}^4$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$U = \langle (2,1,1,1), (0,1,0,1) \rangle \quad \text{und} \quad v = (3,0,4,1).$$

Bestimmen Sie in diesem Fall explizit den Vektor $u_0 \in U$ mit der in (b) beschriebenen Eigenschaft sowie $\|v - u_0\|$.