Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zweite Klausur (Nachdruck) Lineare Algebra I

Sommersemester 2022
26.09.2022

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Hilfsmittel: Ein individuell verfasstes A4-Blatt (beidseitig, in Handschriftgröße).
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen zehn Aufgaben bearbeiten.
- Bearbeiten Sie Aufgaben jeweils direkt unterhalb des Aufgabentextes und auf der bzw. den nachfolgenden Leerseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Leerblätter. Beschriften Sie diese jeweils mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der relevanten Aufgabennummer.
- Geben Sie am Ende das Aufgabenheft und ggf. zusätzliche Lösungsblätter nach Aufgabenreihenfolge geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)
Es sei $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, y\}$ ein Körper mit genau vier Elementen.

(a) Vervollständigen Sie die nachfolgenden Additions- und Multiplikationstafeln für den Körper $\mathbb{F}_4$.

$+$	0	1	x	y
0	0	1	x	y
1	1			
x	x			
y	y			

$\cdot$	0	1	x	y
0	0	0	0	0
1	0	1	x	y
x				
y				

(b) Sei $f = x \cdot T^2 + 1 \cdot T - (x+1) \in \mathbb{F}_4[T]$ ein Polynom über $\mathbb{F}_4$. Berechnen Sie die Bilder $f(0), f(1), f(x), f(y)$ von f unter den entsprechenden Einsetzungshomomorphismen.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)
Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{Q}$ mit $\dim(V) = 4$ und $\dim(W) = 5$, und sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung vom Rang 3.

(a) Welche Dimension hat der Kern von φ? Begründen Sie Ihre Antwort knapp, indem Sie ein geeignetes Resultat aus der Vorlesung benennen und anwenden.

(b) Geben Sie explizit eine mögliche Koordinatenmatrix $[\varphi]_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ für φ bezüglich geordneter Basen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ für V, W an und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie knapp erläutern, wie dabei $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in Bezug auf φ zu wählen wären.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)
Die 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$ bilden bekanntlich einen nicht-kommutativen Ring $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$$

bzgl. der Einschränkungen der Addition und Multiplikation einen Körper bildet, indem Sie die drei Körperaxiome angeben, welche sich nicht direkt von dem Ring $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ auf S vererben, und dann überprüfen, dass diese tatsächlich gegeben sind.

(Dass die Teilmenge S unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, kann leicht nachgeprüft werden, und Sie brauchen diese Tatsache *nicht* gesondert begründen.)

Aufgabe 4 (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(650, 351)$ der Zahlen 650 und 351 in $\mathbb{Z}$.

Entscheiden Sie anhand Ihres Ergebnisses, ob 351 modulo 650 invertierbar ist, d. h., ob die Restklasse $\overline{351}$ eine Einheit in dem Ring $\mathbb{Z}/650\mathbb{Z}$ ist.

Verwenden Sie anschließend die Erweiterung des Algorithmus, um eine explizite Darstellung von $\mathrm{ggT}(650, 351)$ als ganzzahlige Linearkombination von 650 und 351 zu finden.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)
Sei

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

eine Matrix, wobei $t \in \mathbb{Q}$ einen Parameter darstellt.

(a) Füllen Sie die folgende Tabelle aus, indem Sie zu jeder Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(3)$ jeweils das Signum $\mathrm{sgn}(\pi)$ und den Wert $a_{1,1\pi} \cdot a_{2,2\pi} \cdot a_{3,3\pi}$ vermerken.

$\pi \in \mathrm{Sym}(3)$	$\mathrm{sgn}(\pi)$	$a_{1,1\pi} \cdot a_{2,2\pi} \cdot a_{3,3\pi}$
...	...	...

(b) Berechnen Sie mithilfe der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix A_t, abhängig vom Parameter $t \in \mathbb{Q}$.

(c) Für welche Parameter $t \in \mathbb{Q}$ hat die Vektorgleichung

$$(x, y, z)\, A_t = (1, 2, 3)$$

eine eindeutige Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$? Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

(a) Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ x & y & z & w \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}),$$

wobei $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$ Parameter darstellen, durch eine Kette geeigneter und anzugebender Elementarumformungen auf Zeilenstufenform.

(b) Welche Dimension besitzt der Untervektorraum

$$U = \langle (1, -2, 3, 0),\ (1, -1, 4, -1),\ (1, 0, 5, -2) \rangle$$

des Standardvektorraums $\mathbb{Q}^4$? Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem mit kleinstmöglicher Anzahl an Gleichungen in den Variablen x, y, z, w an, dessen rationale Lösungen $(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4$ gerade den Elementen des Untervektorraums U in (b) entsprechen. Begründen Sie auch hier kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*)
Sei K ein Körper. Eine Matrix $\mathbf{a} \in \mathrm{Mat}_2(K)$ heißt symmetrisch, falls sie gleich ihrer Transponierten ist: $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$. Betrachten Sie die Menge

$$U = \{\mathbf{a} \in \mathrm{Mat}_2(K) \mid \mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{tr}}\}$$

aller symmetrischen 2×2-Matrizen über K.

(a) Zeigen Sie, dass U einen Untervektorraum des K-Vektorraums $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ bildet, indem Sie explizit eine Basis für U angeben und somit U als lineare Hülle identifizieren. Geben Sie weiterhin einen Isomorphismus von V zu einem geeigneten Standardvektorraum über K an.

(b) Überprüfen Sie für $K = \mathbb{Q}$ bzw. $K = \mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, ob die Elemente

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis für den Vektorraum U bilden.

Aufgabe 8 (*20 Punkte*)
Es sei $V = \mathbb{R}^2$ der reelle Standardvektrorraum, und $\varrho\colon V \to V$ bezeichne die Drehung mit Drehzentrum $u = (2, 1)$ um einen rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn.

(a) Ist ϱ eine lineare Abbildung? Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $\sigma\colon V \to V$ und genau einen Vektor $w \in V$ mit der Eigenschaft:

$$v\varrho = v\sigma + w \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Bestimmen Sie explizit die Koordinatenmatrix $[\sigma]_{\mathfrak{E}}$ und den Koordinatenvektor von w bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ von V, mit $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$.

(c) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus (b) dazu, eine explizite Abbildungsvorschrift für ϱ in den Standardkoordinaten zu bestimmen.

Aufgabe 9 (*28 Punkte*)
Es sei $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, ein Körper mit 7 Elementen. Betrachten Sie den folgenden linearen Endomorphismus des Standardvektorraums $\mathbb{F}_7^3$:

$$\alpha\colon \mathbb{F}_7^3 \to \mathbb{F}_7^3, \quad (x, y, z) \mapsto (-3x - y, x - 2y - z, -x - y - 2z).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}}$ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$, bestehend aus $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{F}_7^3$.

(b) Verifizieren Sie, dass das charakteristische Polynom von A wie folgt gegeben ist:

$$f = \mathrm{Charpol}(A) = X^3 + 2X + 5 \in \mathbb{F}_7[X].$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von α sowie deren algebraische Vielfachheiten.

(d) Berechnen Sie die Eigenräume von α, indem Sie jeweils eine geeignete Basis bestimmen. Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von α an.

(e) Entscheiden Sie, ob α diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie ggf. eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 10 (*20 Punkte*)
Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Abbildung

$$\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \langle\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\rangle = \mathrm{Spur}(\mathbf{a}^{\mathrm{tr}}\,\mathbf{b}),$$

wobei $\mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$ die Transponierte einer Matrix $\mathbf{a}$ bezeichnet und die Spur von $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ durch $\mathrm{Spur}(\mathbf{a}) = a_{11} + a_{22}$ erklärt ist.
Eine Matrix $\mathbf{a} \in V$ heißt symmetrisch, falls sie gleich ihrer Transponierten ist: $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$.

(a) Verifizieren Sie, dass V mittels $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ ein euklidischer Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für die induzierte euklidische Norm $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in den Standardmatrixkoordinaten.

(c) Verifizieren Sie, dass

$$\mathbf{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis für den euklidischen Vektorraum V bilden.

(d) Bestimmen Sie für den Untervektorraum U aller Diagonalmatrizen in V und für den Untervektorraum W aller symmetrischen Matrizen in V jeweils eine Basis für das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ bzw. $W^{\perp}$ in V.