-1-

# Tutorium zu L4/L5, Lineare Algebra I, 28.10.2019

1.) Satz: Vor.: $A_1, A_2$ Mengen,

Beh.: $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \overset{?}{\underset{!}{\supseteq}} \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2)$.

$$\left[ C \supseteq B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \in C \right]$$

Bew.: Sei $X \in \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2)$.

Dann $X \in \mathcal{P}(A_1) \vee X \in \mathcal{P}(A_2)$.

Dann $X \subseteq A_1 \vee X \subseteq A_2$.

Dann $X \subseteq A_1 \cup A_2 \vee X \subseteq A_2 \cup A_1$.

Dann $X \subseteq A_1 \cup A_2$.

Dann $X \in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2)$. $\square$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

---

2.) Satz: Vor.: Sei $g = \{(x,y);\ y = -2x+3\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

$h = \{(x, \underbrace{5-2x}_{y=-2x+5});\ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Beh.: $g$ und $h$ haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt,

$\Leftrightarrow \neg(\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in g \wedge (x,y) \in h)$

$\Leftrightarrow \neg(\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in g \cap h)$.

Bew. (durch Widerspruch): 1. Angenommen, es gäbe ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in g \cap h$,

2. Also $(x,y) \in g$ und $(x,y) \in h$,

also $\underset{(I)}{y = -2x+3}$ und $\underset{(II)}{y = -2x+5}$, also $3 \underset{(I)}{=} 2x + y \underset{(II)}{=} 5$.

3. Widerspruch, da $3 \neq 5$! $\square$

3.) Satz: Vor.: $x \in \mathbb{R}$

Beh.: Äquivalent sind:

(i) $x < 2$

(ii) $-x > -2$

(iii) $2 - x > 0$

(iv) $2 > x$

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x<2$. Dann mult. mit $-1$ und erhalten

$$(-1)x > (-1)\cdot 2, \text{ d.h. } -x > -2.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $-x>-2$. Dann addiere 2 auf beiden Seiten und erhalten

$$2+(-x) > 2+(-2), \text{ d.h. } 2-x>0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $2-x>0$. Dann addiere $x$ auf beiden Seiten, erhalte

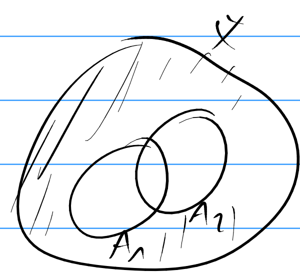
$$x+(2-x) > x+0, \text{ d.h. } 2 > x.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $2>x$. Dann ist $x<2$. $\square$

---

4.) Vor.: $X$ Menge, $A_1, \dots, A_n \subseteq X$.

Beh.: $$X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \underline{\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)}$$




Bew. (vollst. Ind.): Ind.anf.: $n=1$: $X \setminus A_1$ ✓

$n=2$: $X \setminus (A_1 \cup A_2) \underset{⊛}{\overset{?}{=}} \underline{X \setminus A_1} \cap \underline{X \setminus A_2}$

Bew. von ⊛: $x \in X \setminus (A_1 \cup A_2) \iff x \in X \wedge x \notin (A_1 \cup A_2)$

$\iff x \in X \wedge \neg(x \in A_1 \cup A_2)$

$\iff x \in X \wedge \neg(x \in A_1 \vee x \in A_2)$

$\iff x \in X \wedge x \notin A_1 \wedge x \notin A_2$

$\iff x \in X \wedge x \in X \setminus A_1 \wedge x \in X \setminus A_2$

$\iff x \in X \wedge x \in X \setminus A_1 \cap X \setminus A_2$

$\iff x \in X \setminus A_1 \cap X \setminus A_2$. $\square$

Ind. Schritt $n \to n+1$: Angenommen, die Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt sie auch für $n+1$, denn:

linke Seite der Beh. für $n+1$

$$= X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) = X \setminus \left( \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cup A_{n+1} \right)$$

$$\overset{\otimes}{=} \underbrace{X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)}_{\substack{\text{ist die linke Seite} \\ \text{der Beh. (für } n)}} \cap \left( X \setminus A_{n+1} \right)$$

$$\underbrace{= \text{die rechte Seite der Beh. (für } n)}$$

$$\underset{\substack{\text{Induk-} \\ \text{tionsvoraus-} \\ \text{setzung}}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \cap (X \setminus A_{n+1})$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n+1} (X \setminus A_i) = \text{rechte Seite der Beh. für } n+1.$$

□

---

5) Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5: 2^n > n^2$.

Bew. (vollst. Ind.): Ind.anf.: $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ✓.

Ind.schritt $n \to n+1$: Sei $2^n > n^2$ richtig für ein $n \geq 5$.

Dann:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{Ind. vor.}}{>} 2 \cdot n^2 \overset{\otimes}{\geq} (n+1)^2 \quad ✓$$

Beh.: $\otimes \Leftrightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2$.

Bew.: $2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \quad | -n^2$

$\Leftrightarrow n^2 \geq 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \geq 2$

$\Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 2$, stimmt für $n \geq 3$ ✓ □

□

6.) Bsp. für Relationen in $X \times Y$ mit $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{2,7,8\}$:

Rel. "<": $R_1 = \{(1,2), (1,7), (1,8), (2,7), (2,8), (3,7), (3,8)\}$

Rel. ">": $R_2 = \{(3,2)\}$

Rel. "≤": $R_3 = R_1 \cup \{(2,2)\}$

Rel. "|": $R_4 = \{(1,2), (1,7), (1,8), (2,2), (2,8)\}$

"Namenslose" Rel.: $R_5 = \{(1,2), (2,7), (1,7)\}$
$R_6 = \{(1,2), (2,7), (3,7)\}$

$xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$

Welche sind linkstotal? $\forall x \exists y : xRy$ : $R_1, R_6, R_3$

" " rechtseindeutig? $xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ : $R_6, R_2$

---

7.) Bsp. für Ä-Rel. auf $X$, d.h. Rel. in $X \times X$:
Sei $X = \{1,2,3,4\}$,
sei
$$\sim \; = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (1,3), (3,1)\}$$

- reflexiv: $x \sim x$ stimmt für alle $x \in X$
- symmetrisch: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ stimmt für alle $x, y \in X$
- transitiv: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ stimmt für alle $x,y,z \in X$
  $3 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 3 \sim 1$ stimmt auch ✓

Menge der Ä-Klassen: $X/\sim \; = \{[x]; x \in X\} = \{[1], [4]\} = \{[2], [4]\}$

Haben $[x] = \{ y ; \; y \sim x \}$

Hier: $[1] = \{1, 2, 3\} = [2] = [3]$,

$[4] = \{4\}$

---

8) in Aufg. 4: $x \sim y \; :\Longleftrightarrow x = y \lor x = -y$

Also: $(x,x) \in \sim \; \lor \; (x,-x) \in \sim$