Lineare Algebra I

Tutorium 21.10.2019, zu L2/L3:

$A := \{4,5\}$ $\qquad \emptyset \subseteq \{4,5\}$

$\{4\} \subseteq A$ w $\qquad B := \{x,y\}$

$x=y: \quad B = \{x\}$

$4 \in A$, $\underbrace{4,5 \in A}_{4 \in A \,\wedge\, 5 \in A}$

$\{4\} \in A$ f $\qquad \emptyset \in \emptyset$ f

$\emptyset \subseteq \emptyset$ w

1.) Bsp.: Potenzmengen bilden $\quad A = \{1,2,3\}$

$\mathcal{P}(A) := \{B;\ B \subseteq A\}$

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \underbrace{\{1\}, \{2\}, \{3\}}_{\text{1-elementige Teilmengen von A}}, \underbrace{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}}_{\text{2-elementigen Teilmengen von A}}, A\}$$

$\emptyset \subseteq \emptyset \iff \forall x \in \emptyset : x \in \emptyset$

$\forall x: \underbrace{\underbrace{x \in \emptyset}_{f} \Rightarrow x \in \emptyset}_{w}$ $\qquad$ w

---

2.) $\neg(\forall x \in M: P(x)) \iff \exists x \in M: \neg P(x)$

$\iff \neg(\forall x, x \in M \Rightarrow P(x))$

$\iff \exists x: \neg(x \in M \Rightarrow P(x))$

$\iff \exists x: x \in M \wedge \neg P(x)$

$\iff \exists x \in M: \neg P(x)$

$\left(\neg(C \Rightarrow D) \iff C \wedge \neg D\right)$

Bsp: $\neg(x \in \mathbb{N}) \iff: x \notin \mathbb{N}$

3) Bsp. zum Aussondern: $G = \{x \in \mathbb{N};\ \underbrace{x \text{ gerade}}_{P(x) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y}\}$

$$G = \{x \in \mathbb{N};\ \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$$
$$= \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$G \subseteq \mathbb{N}$

$$\{\underset{?}{\underline{x}};\ \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$$

$$\{x \in \underline{\mathbb{R}};\ \exists \underbrace{y \in \mathbb{N} : x = 2y}\} = \{2, 4, 6, \dots\} = G \subseteq \mathbb{N}$$

$x = -1 = 2y$ geht nicht

$\forall x \in G, x \neq 2 : \exists p_1, p_2 \in \mathbb{P} : x = p_1 + p_2$ Aussage, $\underline{w/f}$

$M := \{x \in G,\ x \neq 2\ ;\ \exists p_1, p_2 \in \mathbb{P} : x = p_1 + p_2\}$ Menge

$M = G$? Unbekannt
$M \subseteq G$

$$\mathbb{P} = \{k \in \mathbb{N};\ l \mid k \Rightarrow l = 1 \vee l = k\} \setminus \{1\}$$

$c \mid k :\Leftrightarrow \exists l : k = cl$
c teilt k

$k \in \mathbb{P} :\Leftrightarrow \{l \in \mathbb{N};\ l \mid k\}$ hat 2 Elemente

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

Bsp.: $101 \in \mathbb{P}$, denn $k \mid 101 \Rightarrow k = 1 \vee k = 101$

$\downarrow$

4.) Beh.: $1001 \notin \mathbb{P}$, d.h. $\exists \ell \in \mathbb{N}: 1 < \ell < 1001 \wedge \ell \mid 1001$

Bew.: Etwa $\ell = 11$, da $1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13$. $\square$

5.) Beh.: $\forall x \in \mathbb{R}: (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Bew.: $l.S. = (x+y)^2 \overset{\uparrow}{=} \underbrace{(x+y)}_{a} \cdot (x+y) \underset{D}{=} (x+y) \cdot x + (x+y) \cdot y$

$\underset{D}{=} x^2 + yx + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$= r.S.$ $\square$

$M = \{1, 2, 3\}$ w/f

$M := \{1, 2, 3\}$

$\uparrow$ definiert M

$\{2, 3\} =: A$

6.) Bsp.: $A := \{3, 4, 6\}$, $B := \{1, 6, 4, 5, 1\}$, $C := \{7, 8\}$

$A \cup B := \{x;\ x \in A \vee x \in B\} = \{3, 4, 6, 1, 6, 4, 5, 1\}$

$= \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B := \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$

$= \{4, 6\} \neq \emptyset$

$A \cap C = \emptyset = B \cap C$ A, C disjunkt

B, C disjunkt

A, B, C nicht disjunkt: denn $A \cap B \neq \emptyset$

$\{\{1\}, 3, 4, 6\} \cap \{1, 6, 4, 5, 1\} = \{4\}$

$1 \neq \{1\}$

$\{x\} = \{\{\{1\}\}\} \subseteq C$ w

$\{\{\{1\}\}\} \in C$ f

$C := \{\{1\}, 1, 2, \overbrace{\{\{1\}\}}^{x :=}, \emptyset\}$

$\emptyset \in C$ w

$1 \in C$ w, $\{1\} \in C$, $\{\{1\}\} \in C$, $\emptyset \subseteq C$ w

$1 \subseteq C$ f
$\{1\} \subseteq C$ w

$a = b$

$\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$

$U \cap V = U \iff U \subseteq V$

$M' \subseteq \mathcal{P}(X)$ Mengensystem

$$\bigcup_{M \in M'} M$$

Bsp.: $X := \{1, 2, 3\}$, $M' := \{\underset{M_1}{\emptyset}, \underbrace{\{1, 2\}}_{M_2}, \underbrace{\{2, 3\}}_{M_3}\}$

$$\bigcup_{M \in M'} M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \bigcup_{i=1}^{3} M_i$$

$M_1 \cup M_2$

$$= \{x;\ \exists M \in M' : x \in M\}$$

$$= \{1, 2, 3\}$$

$1 \in M_2$ w, $2 \in M_2$ w, $3 \in M_3$ w

7.) __Bsp.:__ Alle Geraden im $\mathbb{R}^2 := \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ sind Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

z.B. $y = 2x + 1$

Genau: $\{(x, y);\ y = 2x + 1,\ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\{(x, 2x+1);\ x \in \mathbb{R}\}$

Gerade mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b:

$$G_{m,b} := \{(x, mx + b);\ x \in \mathbb{R}\}$$

Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$:

$$\{G_{m,b};\ m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x, y);\ y \in \mathbb{R}\};\ x \in \mathbb{R}\}$$

8.) Bsp.: Satz: $\forall x \in \mathbb{R}: |x+3| < 1$
$\iff -4 < x \wedge x < -2$

Def. Betrag: $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Bew.: 1. Fall: $x+3 \geq 0$: $x+3 < 1 \iff x < -2$.

2. Fall: $x+3 < 0$: $-x-3 < 1 \iff -4 < x$.

D.h.: $|x+3| < 1$

$\iff (x+3 \geq 0 \wedge x < -2) \vee (x+3 < 0 \wedge -4 < x)$

$\iff (-3 \leq x < -2) \vee (-4 < x < -3)$

$\iff (-4 < x < -3) \vee (-3 \leq x < -2)$

$\iff -4 < x < -2.$ $\square$

Direkt: $|x+3| < 1 \iff -1 < x+3 < 1 \iff -4 < x < -2.$ $\square$