Tutorium zur Linearen Algebra I, 27.1.2020

zu $\underbrace{L25}_{\text{normale Endo}} / \underbrace{L26}_{\text{Hauptachsentrafos}}$

L25: Adjungierte Matrix: $A^* := \overline{A}^T$

$\hookrightarrow f^*$ zu f,

erfüllt per Def. $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$

	Endo f	Matrix $A \in K^{m\times n}$
normal	$f\circ f^* = f^*\circ f$	$AA^* = A^*A$
unitär	$f^* = f^{-1}$	$A^* = A^{-1}$
$\hookrightarrow$ über $\mathbb{R}$: orthogonal	$f^T = f^{-1}$	$A^T = A^{-1}$
selbstadjungiert/hermitesch	$f^* = f$	$A^* = A$
$\hookrightarrow$ über $\mathbb{R}$: symmetrisch	$f^T = f$	$A^T = A$

	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i&i\\i&i\end{pmatrix} = A$	$\begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$
normal ($A^*A = AA^*$)	j	j ②	j	j
unitär	n	n ①	n ③	j
$\hookrightarrow$ über $\mathbb{R}$: orthogonal	n	— (n)	—	j ④
selbstadjungiert/hermitesch	j	n	j	n
$\hookrightarrow$ über $\mathbb{R}$: symmetrisch	j	— (j)	—	n

①: $\left\langle \binom{i}{i}, \binom{i}{i} \right\rangle = i\cdot(-i) + i\cdot(-i) = 2$

②: $A^*A = -A^2 = A\cdot(-A) = AA^*$

③: $\left\langle \binom{1}{-i}, \binom{i}{1} \right\rangle = 1\cdot(-i) + (-i)\cdot 1 = -2i \neq 0$

④: $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, da $\left\langle \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \right\rangle = (\cos\alpha)(-\sin\alpha) + (\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha) = 0$

$$\left\| \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \right\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \left\| \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \right\|^2$$

$\rightarrow$ Spalten sind ONB

	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
normal $(A^*A = AA^*)$	j ⑥	n ⑦	j	j
unitär	n ⑤	n	j ⑧	j
↳ über $\mathbb{R}$: orthogonal	—	n	—	j
selbstadjungiert / hermitesch	n	n	n	n
↳ über $\mathbb{R}$: symmetrisch	—	n	—	n

⑤: $\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}} \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(i\cdot(-1) + 1\cdot(-i)\right) = -i \neq 0$

$\left(\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = x\bar{u} + y\bar{v} \right)$

⑥: $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2+1 & i+i \\ -i-i & 1-i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ ← selbst-adj.

$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2+1 & i+i \\ -i-i & 1-i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$

A^*A selbstadj.: $(A^*A)^* \underset{\uparrow}{=} A^*\cdot(A^*)^* = A^*\cdot A$

$(AB)^* = B^*A^*$

⑦: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

⑧: $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\cdot(-i) + i\cdot 2 = 0$ ✓

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ist selbstadj., Hauptachsentrafo?

$\exists X$, X unitär: $X^*AX = \Lambda = \underbrace{\mathrm{diag}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$

1. Schritt: EWe ausrechnen: char. Polynom: $\det(A - T\cdot I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} - T\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} 1-T & i \\ -i & 1-T \end{pmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T\cdot(T-2)$

↳ Nst. ⇝ EWe: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ ⇝ $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Schritt: EVen ausrechnen: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Gaußelim.: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{|\cdot i} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\xi_1 + i\xi_2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = -i\xi_2$

  $\rightarrow$ EV: $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Eigenraum: $L\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1-2 & i \\ -i & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Gaußel.: $\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{|\cdot(-i)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $\xi_1 = i\xi_2 \Leftrightarrow -\xi_1 + i\xi_2 = 0$

  $\rightsquigarrow$ EV: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Eigenraum $L\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ unitär, da

zu $\lambda_1 = 0$ zu $\lambda_2 = 2$

$\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (-i)\cdot(-i) + 1\cdot 1$
$= -1 + 1 = 0$ ✓

Jetzt: $X^{-1}AX = X^*AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

X: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Vor.: $A \in K^{n\times n}$, Spalten von A seien $a_1, \dots, a_n$.
Beh.: A unitär $\Leftrightarrow$ $(a_1, \dots, a_n)$ ONB

Bew.: Hatten: $A^*A = (\langle a_i, a_j\rangle)_{i,j}$

A unitär $\Leftrightarrow A^*A = I_n = (\delta_{ij})_{i,j} \Leftrightarrow \delta_{ij} = \langle a_i, a_j\rangle$
$\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_j)$ ONB $\square$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$ selbstadj $\rightsquigarrow$ char. Pol. $T^2(T-2)^2 \rightsquigarrow$ EWe 0, 0, 2, 2

$\rightarrow X^*AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$