Tutorium zur Linearen Algebra I, 20.1.2020

zu L23/L24

Drehmatrix: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, z.B. $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

1.) Drehung von $\mathbb{R}^3$ um die z-Achse: $D_z = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
(Winkel α)

2.) Drehung von $\mathbb{R}^3$ um die Achse $L(v) = \mathbb{R}v$, $v \in \mathbb{R}^3$?
(Winkel α)
Sei A die zugeh. Matrix,
A stellt D_z dar bzgl. ONB $(u_1, u_2, v) = \mathcal{B}$

Setze $\underbrace{B := (u_1 | u_2 | v)}_{\text{ONB}}$ $\rightsquigarrow$ B tut: $\left.\begin{array}{l} e_1 \overset{B}{\mapsto} u_1 \\ e_2 \mapsto u_2 \\ e_3 \mapsto v \end{array}\right\}$ „dreht" das Koordinatensystem (e_1, e_2, e_3)

Haben: $D_z = B^{-1} \cdot A \cdot B$,
und $\underline{\underline{A = B\, D_z\, B^{-1}}}$

Bsp.: $\tilde{v} = \begin{pmatrix}-1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix}$, $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix}3 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$, $\tilde{u}_2 = \tilde{v} \times \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix}-1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 10 \\ -6\end{pmatrix}$

Vektorprodukt

Normieren: $\|\tilde{v}\| = \sqrt{14}$, $\|\tilde{u}_1\| = \sqrt{10}$, $\|\tilde{u}_2\| = \sqrt{140}$

$\rightsquigarrow$ ONB: $u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{140}}\begin{pmatrix}2 \\ 10 \\ -6\end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, v)$

Somit: $B := \begin{pmatrix}3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{140} & -1/\sqrt{14} \\ 0 & 10/\sqrt{140} & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{10} & -6/\sqrt{140} & 3/\sqrt{14}\end{pmatrix}$

aus L25: B ist orthogonale Matrix, d.h. $\underline{B^{-1} = B^T}$

$\rightsquigarrow$ dann kann A berechnet werden als $A = B \cdot D_z \cdot B^T$

Bsp: $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{u}_2 = \tilde{v} \times \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ ONB: $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ orthogonale Matrix: $B^{-1} = B^T$

Somit: $A = B \cdot D_2 \cdot B^T =$
$(\alpha = \frac{\pi}{2})$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{D_2 \text{ um } \alpha = \frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{B^{-1}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

2.) • Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an x-y-Ebene: $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
denn $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto e_2$, $e_3 \mapsto -e_3$

• Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an Ebene: $U = L(u_1, u_2)$, $U^\perp = L(v)$,
v ist Normalenvektor von U — lin. unabh., orthogonal

$\rightsquigarrow$ ONB (u_1, u_2, v) $\rightsquigarrow$ Matrix $B = (u_1 | u_2 | v)$,
B tut: $e_1 \mapsto u_1$, $e_2 \mapsto u_2$, $e_3 \mapsto v$

Sei S_2 diese Spiegelung,
dann $S_1 = B^{-1} \cdot S_2 \cdot B$

B orthog.: $B^{-1} = B^T$

$\Leftrightarrow S_2 = B S_1 B^{-1} = B \cdot S_1 \cdot B^T$

Bsp.: $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow S_2 = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^T = \ldots$

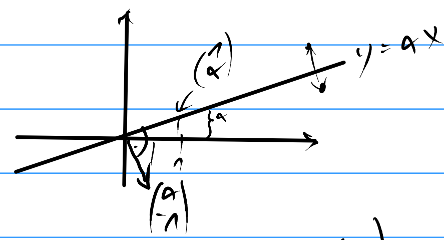
3.) Einfacher im $\mathbb{R}^2$: Spiegelung an x-Achse: $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $e_1 \mapsto e_1$, $e_2 \mapsto -e_2$

an Gerade $U = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$, $U^\perp = L\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right)$: Spiegelung $S_2 = ?$

d.h. $y = \alpha x$

$\Leftrightarrow \alpha x + (-1) \cdot y = 0$

Normalenvektor: $\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$



$\rightsquigarrow$ zugeh. Orthobasis: $\hat{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow$ ONB: $\mathcal{B}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Norm: $\sqrt{1+\alpha^2}$

$B = B^T$

$\rightarrow$ Matrix $B = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$ orthogonale Matrix, symmetrisch

Also: $S_2 = B\, S_1\, B^T = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1+\alpha^2}\begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & 2\alpha \\ 2\alpha & \alpha^2-1 \end{pmatrix}}}$$

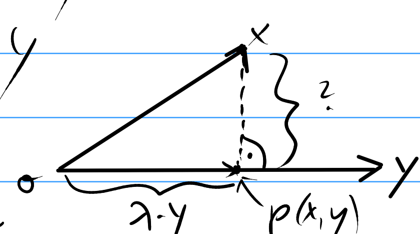
speziell $\alpha = 2$: Spiegelachse $y = 2x$

$$\rightsquigarrow S_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4.) Lot / Senkrechte Projektion von x auf y:

$p(x,y) = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \cdot y = \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2} \cdot y$

$= \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|} \cdot \frac{y}{\|y\|} = \langle x, \frac{y}{\|y\|} \rangle \cdot \frac{y}{\|y\|}$



bestimme λ: $\lambda y \perp x - \lambda y$

$\Leftrightarrow \langle y, x - \lambda y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle - \lambda \langle y, y \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$

Bsp.: $\mathbb{R}^3$: $x = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\langle y,y\rangle = (-1)^2 + 2^2 = 5$

$$\rightsquigarrow p(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot y = \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 2+4\cdot 0}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$p(x,y) = \begin{pmatrix}1/5\\-2/5\\0\end{pmatrix}$$

Abstand von x zum Lotfußpkt. $p(x,y)$

$$\|p(x,y) - x\| = \left\|\begin{pmatrix}1/5 - 3\\-2/5 - 1\\0 - 4\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-16/5\\-7/5\\-20/5\end{pmatrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{16^2 + 7^2 + 20^2}$$

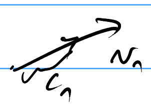
L24: Schmidt-Orthogonalisierung: $\underbrace{(v_1, v_2, \dots, v_n)}_{\text{Basis von } V} \rightsquigarrow$ ONB $(c_1, c_2, \dots, c_n)$

mit $L(v_1, \dots, v_k) = L(c_1, \dots, c_k)$ für jedes $k \le n$.

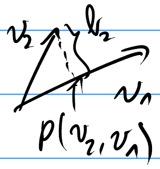
Konstruktion: $b_1 := v_1$, $c_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$,

$\rightarrow$ $b_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, c_i\rangle \cdot c_i \rightsquigarrow c_{k+1} := \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$

anschaulich im $\mathbb{R}^3$: $(v_1, v_2, v_3) \rightsquigarrow (c_1, c_2, c_3)$, ONB mit $L(v_1) = L(c_1)$,
$L(v_1, v_2) = L(c_1, c_2)$
$L(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3 = L(c_1, c_2, c_3)$

1. Schritt: 

$c_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2. Schritt: 

b_2: Lotverbindung $v_2 - p(v_2, v_1)$

$\rightarrow$ $b_2 = v_2 - p(v_2, v_1) = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1$
$= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1 = v_2 - \langle v_2, c_1\rangle \cdot c_1$

$c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$

$L(c_1, c_2) = L(v_1, v_2)$

3. Schritt:

$\leftarrow v_3 - P$

$P \rightarrow$ Lot von v_3 auf $L(v_1, v_2)$: $P = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$
so, dass $P - v_3 \perp c_1$
und $P - v_3 \perp c_2$

Bestimme λ_1, λ_2:

1. $0 = \langle \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - v_3, c_1 \rangle \Leftrightarrow \lambda_1 = \langle v_3, c_1 \rangle$
2. $0 = \langle \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - v_3, c_2 \rangle \Leftrightarrow \lambda_2 = \langle v_3, c_2 \rangle$

$\rightarrow b_3 = v_3 - P = v_3 - \langle v_3, c_1 \rangle \cdot c_1 - \langle v_3, c_2 \rangle \cdot c_2$

$$c_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}$$

<u>Bsp.:</u> zu approx. Lsg. eines unlösbaren LGS: $Ax = b$ unlösbar

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Normalengl. $A^*Ax = A^*b$

Adjungierte: $A^* = \bar{A}^T \overset{\text{hier}}{=} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$, $A^*b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$A^*Ax = A^*b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 26 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow x_0 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/15 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ ist „bestmögliche" Lösung,
d.h. $\|Ax_0 - b\|$ minimal