Tutorium zur Linearen Algebra I, 13.1.2020

zu L22/L23

L22: Abb. $b : V \times V \to K$ V sei ein K-VR

Linearität? z.B. Lasse $w \in V$ fest, betr. $b_w : V \to K$
$v \mapsto b(v, w)$

$\rightsquigarrow b_w$ linear $\Leftrightarrow b(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha b(v_1, w) + \beta b(v_2, w)$

BiLinear?

b bilinear $:\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K \ \forall v_1, v_2, w \in V: b(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha b(v_1, w) + \beta b(v_2, w)$
und $\forall \alpha, \beta \in K \ \forall v_1, v_2, w \in V: b(w, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha b(w, v_1) + \beta b(w, v_2)$

Erinnerung: $b : V \times V \to K$ heißt Determinantenfunktion, falls
- b bilinear,
- b alternierend $\Leftrightarrow b(x,x) = 0$, antisymm. $\overset{?}{\Leftrightarrow} \underbrace{b(x,y) = -b(y,x)}_{?}$,
- b normiert, d.h. $b(e_1, e_2) = 1$

- b heißt symmetrisch $:\Leftrightarrow b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x, y \in V$

Eine Abb. $b : V \times V \to K$, die linear & symm. ist, ist bilinear.
nimm $K = \mathbb{R} \rightsquigarrow b(x,y) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ wollen $b(x,x) \geq 0$ haben!

Def.: Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ symm. & bilinear. Dann heißt b positiv definit, falls $b(x,x) \geq 0$ und $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Def.: b heißt <u>reelles S.P.</u> $\Leftrightarrow$ b symm., b (bi)linear, b pos. definit
$b : V \times V \to \mathbb{R}$

Def.: $\mathbb{R}$-VR V mit reellem S.P. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt <u>euklidischer Raum.</u>
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ Norm, Länge von x

Aufgabe: Liegen Bilinearformen vor? $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$x, y \in \mathbb{R}^2$, etwa $x = \binom{x_1}{x_2}, y = \binom{y_1}{y_2}$

	bilinear?	antisymm.?	symm.	S.P.?
a) $b(x,y) = x_1 y_1$ →	ja	nein	ja	nein
↝ b) $b(x,y) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1$	ja	nein	nein	—
c) $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ →	ja	nein	ja	nein
d) $b(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$	nein	nein	ja	—
e) $b(x,y) = x_1 - y_1$	nein	ja	nein	—
f) $b(x,y) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$	ja	ja	nein	—
g) $b(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2$	ja	nein	ja	ja

d): $x = \binom{1}{1}, y = \binom{0}{0}$

$\leadsto b(2x,y) = b\left(\binom{2}{2}, \binom{0}{0}\right) = 2 \cdot 2 = 4$

$2b(x,y) = 2 \cdot b\left(\binom{1}{1}, \binom{0}{0}\right) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 4 = b(2x,y)$

a): nicht pos. def.: $b(x,x) = x_1^2 \geq 0$ ✓

$b\left(\binom{0}{1}, \binom{0}{1}\right) = 0$ mit $\binom{0}{1} \neq 0$

e): $u_1 = u_2 = \binom{1}{0}, y = \binom{1}{1}$

$b(u_1 + u_2, y) = b\left(\binom{2}{0}, \binom{1}{1}\right) = 2 - 1 = 1$

$\left.\begin{array}{l} b(u_1, y) = b\left(\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right) = 1 - 1 = 0 \\ \text{und } b(u_2, y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b(u_1,y) + b(u_2,y) = 0 \neq 1$

c): pos. def.? $b\left(\binom{0}{1}, \binom{0}{1}\right) = -1 < 0$

f): b ist antisymm.: $b(y,x) = 2y_1x_2 - 2y_2x_1 = -(2x_1y_2 - 2x_2y_1) = -b(x,y)$

$b(\alpha x + \beta x', y) = 2 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_1')y_2 - 2 \cdot (\alpha x_2 + \beta x_2')y_1 = \ldots = \alpha b(x,y) + \beta b(x',y)$

$x = \binom{x_1}{x_2}, x' = \binom{x_1'}{x_2'} \to \alpha x + \beta x' = \binom{\alpha x_1 + \beta x_1'}{\alpha x_2 + \beta x_2'}$

↳ beim 2. Argument Antisymmetrie verwenden, um Bilinearität zu bekommen:

$$b(x, \alpha y + \beta y') \underset{\text{antisymm.}}{=} -b(\alpha y + \beta y', x) \underset{\text{Lin. im 1. Arg.}}{=} -(\alpha b(y,x) + \beta b(y',x))$$

$$\underset{\text{antis.}}{=} \alpha b(x,y) + \beta b(x,y')$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $\mathbb{R}^2$: $\quad \left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \right\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$

$A^T = A$ symm.

Standard-S.P. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, setze $\langle x, y\rangle_A = \langle x, Ay\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\eta_1 + \eta_2\\ \eta_1 + 2\eta_2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \xi_1(2\eta_1 + \eta_2) + \xi_2 \cdot (\eta_1 + 2\eta_2) = \underline{2\xi_1\eta_1 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + 2\xi_2\eta_2}$$

ist S.P.: • symm.: $\langle y, x\rangle_A = \langle y, Ax\rangle$

$$= \eta_1(2\xi_1 + \xi_2) + \eta_2 \cdot (\xi_1 + 2\xi_2) = 2\eta_1\xi_1 + \eta_1\xi_2 + \eta_2\xi_1 + 2\eta_2\xi_2$$

$$= \langle x, Ay\rangle = \langle x, y\rangle_A \checkmark$$

(da A symm.)

• Linearität in x: $\langle \alpha x + \beta x', y\rangle = \dots = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x', y\rangle$ ✓

• positiv definit: 1.) $\langle x, x\rangle_A = 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2$

$$= \underbrace{\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}_{=(\xi_1+\xi_2)^2 \geq 0} + \underbrace{\xi_1^2 + \xi_2^2}_{\geq 0} \geq 0 \checkmark$$

2.) Wenn $\underbrace{\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2} + \underbrace{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 0$,

dann $= 0$ und $= 0$, d.h. $\xi_1 = \xi_2 = 0$,

d.h. $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = 0$.

$\rightsquigarrow$ Norm: $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A} = \sqrt{2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2}$

Standard-Norm: $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$

Einheitskreis mit Standard-S.P.: $\{x\in\mathbb{R}^2;\ \|x\|=1\} = \{x\in\mathbb{R}^2;\ \xi_1^2+\xi_2^2=1\}$

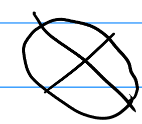
" mit Norm $\|\cdot\|_A$: $\{x\in\mathbb{R}^2;\ \|x\|_A=1\} = \{x\in\mathbb{R}^2;\ \underbrace{2\xi_1^2+2\xi_1\xi_2+2\xi_2^2=1}_{\text{Glg.}}\}$

Glg.: $2x^2+2xy+2y^2=1 \quad |:2$

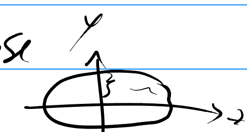
$$\iff x^2+xy+y^2=\frac{1}{2} \iff \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}}+\frac{3y^2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\iff \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot y^2=\frac{1}{2}$$

$$\iff 4\Big(\underbrace{x+\frac{y}{2}}_{z}\Big)^2+3y^2=2$$



$$\iff 4z^2+3y^2=2$$ Ellipse



Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\| \iff \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|}\le 1$

Bsp.: $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \left|\sum_{i=1}^n \xi_i\eta_i\right| \le \left(\sum \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Standard-S.P.

Bsp.: $n=3$, $x=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow |-3-4+3| \le \sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{9+4+1}$

$4=|-4| \le 14$ ✓

Bsp.: $V=\mathcal{C}([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt \rightsquigarrow \|f\|=\sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}$$

Cauchy-Schwarz: $\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}\cdot\sqrt{\int_0^1 g(t)^2\,dt}$

z.B. $\left|\int_0^1 t^2\cdot(t+1)\,dt\right| = \int t^3\,dt+\int t^2\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1+\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

$\int_0^1 t^4\,dt=\frac{1}{5}$, $\int_0^1 (t+1)^2\,dt=\int_1^2 u^2\,du=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

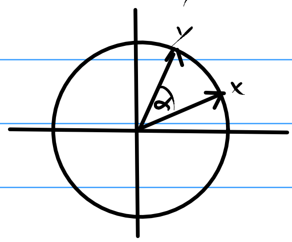
L23: Winkel $\leftrightarrow$ S.P.: Kosinussatz: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = \sphericalangle(x,y)$

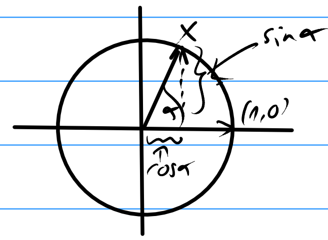
Dann:

$$\cos\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \leftarrow \in [-1,1]$$

laut Cauchy-Schwarz

x, y normiert, d.h. $\|x\| = 1 = \|y\|$: $\cos\alpha = \langle x,y\rangle$





Drehmatrizen: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = D_\alpha$ Drehung um α

Sind die folgenden Drehmatrizen?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_{\frac{\pi}{2}}$, ja

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = D_{\frac{\pi}{4}}$, ja

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ nein

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, nein

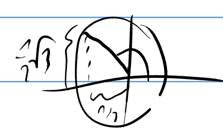
e) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = D_{\frac{2\pi}{3}}$ ja

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ ja:



$\langle x, Ay\rangle$

$\langle x|A|y\rangle$ mit $\underbrace{A|y}_{A\cdot y}$

$\langle x|y\rangle$

$\langle x|$ ← x^T

$|y\rangle$ ← y

" $\langle Ax, y\rangle$

A symm. / A selbstadj.